

Automorphismes de S_n : Isenmann p. 36 104-105

Pour $n \neq 6$, tout automorphisme de S_n est intérieur.

on note $\text{Int}(S_n) = \{ \varphi \in \text{Aut}(S_n) \mid \exists \sigma \in S_n \mid \varphi(\tau) = \sigma \tau \sigma^{-1}, \forall \tau \in S_n \}$

Lemme: Soit $\varphi \in \text{Aut}(S_n)$. Si φ transforme une transposition en transposition, alors $\varphi \in \text{Int}(S_n)$.

Démonstration: Il suffit de montrer ce résultat sur un ensemble de générateurs de S_n : $\tau_i = (1, i)$; $i \in \{2 \dots n\}$

Par hypothèse, $\varphi(\tau_i)$ est une transposition.

Supposons que $i \neq j$, $\varphi(\tau_i)$ et $\varphi(\tau_j)$ sont à supports disjoints.

Alors ils commutent et donc $\varphi(\tau_i \tau_j) = \varphi(\tau_i) \varphi(\tau_j) = \varphi(\tau_j \tau_i)$

Donc par surjectivité de φ : $\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i$ ce qui est faux

donc $\exists a_1 \in \{1 \dots n\} \mid a_1 \in \text{support}(\varphi(\tau_i), \varphi(\tau_j))$

Notant alors $a_2, a_3 \in \{2 \dots n\} \mid \varphi(\tau_i) = (a_1 a_2) ; \varphi(\tau_j) = (a_1 a_3)$

Et a_2, a_3 sont 2 à 2 distincts

On répète le même argument par montrer que $\tau_i \xrightarrow{2} \exists a_i \mid \varphi(\tau_i) = (a_1 a_i)$

Par surjectivité de φ , les a_i sont distincts et on a donc

construit $\sigma = \{1 \dots n\} \rightarrow \{1 \dots n\}$ tel que $i \in \{2 \dots n\}$,
 $i \mapsto a_i$

$\sigma \tau_i \sigma^{-1} = \sigma(1, i) \sigma^{-1} = (\sigma(1), \sigma(i)) = (a_1 a_i) = \varphi(\tau_i)$.

Comme les τ_i engendrent S_n , on a donc $\varphi(\tau) = \sigma \tau \sigma^{-1} \forall \tau \in S_n$

ie $\varphi \in \text{Int}(S_n)$ $\square$

Démonstration: l'ordre est une propriété algébrique donc l'image d'une transposition par $\varphi \in \text{Aut}(S_n)$ est un élément d'ordre 2. $\textcircled{3}$

On note Th l'ensemble des $\sigma \in S_n \mid \sigma$ est produit de k transpositions à supports disjoints.

$\rightarrow$ σ et τ sont conjugués si ils ont le même nb de cycles de même longueur.

Th est une classe de conjugaison de S_n et il suffit alors de montrer

que $\varphi(T_1) = T_1$ d'après le lemme.

l'image d'une classe de conjugaison étant une classe de conjugaison, alors $\exists h \in \mathbb{N} \mid \varphi(T_2) = T_h$ (5)

Supposons par l'absurde que $h > 1$.

$$|T_1| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\text{D'autre part : } |T_h| = \binom{n}{2} \times \binom{n-2}{2} \times \dots \times \binom{n-2h+2}{2} \times \frac{1}{h!}$$

$$= \frac{\frac{n!}{2!(n-2)!} \times \frac{(n-2)!}{2!(n-4)!} \times \dots \times \frac{(n-2h+2)!}{2!(n-2h)!}}{h!}$$

$$= \frac{n!}{2^h h! (n-2h)!} = \frac{n(n-1) \times \dots \times (n-2h+1)}{2^h h!}$$

Par injectivité de φ : $|T_1| = |\varphi(T_1)| = |T_h|$ d'où :

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1) \times \dots \times (n-2h+1)}{2^h h!} \Leftrightarrow (n-2) \times \dots \times (n-2h+1) = 2^{h-1} \times h! \quad (*)$$

* Si $h=2$ alors $(*) \Leftrightarrow (n-2)(n-3) = 2 \times 2 = 4$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$

* Si $h=3$ alors $(*) \Leftrightarrow (n-2)(n-3)(n-4) = 2^3 \times 3$ admet une unique solution : $n=6$

* Si $h > 3$ alors $\frac{n!}{2^h h! (n-2h)!} = \frac{n(n-1)}{2} \Leftrightarrow \frac{(n-2)!}{h! (n-2h)!} = 2^{h-1} \Leftrightarrow (n-2) \times \dots \times (n-h+1) \times \binom{n-h}{h} = 2^{h-1}$ (6)
Comme $n-2$ ou $n-3$ est impair, il n'y a pas de solution.

Ainsi, pour $n \neq 6$, la seule solution est $h=1$ donc $\varphi(T_1) = T_1$ d'où

$\text{Aut}(G) = \text{Aut}(G_n)$ d'après le lemme $\square$

① Szpiro p. 266 $G_n = \langle u_{ij} \rangle = \langle (i, j) \rangle = \langle (i-1, i) \rangle = \langle (u_{21}, u_{n-1}) \rangle$

* Montrons que tout cycle est produit de transpositions

Soit $(1 \dots i)$ où $2 \leq i \leq n$

$$(1 \dots i) = (12)(23) \dots (i-1 i)$$

Soit $(a_1 \dots a_i)$ quelconque d'ordre i ; ce cycle est conjugué à $(1 \dots i)$

donc $\exists \sigma \in S_n \mid (a_1 \dots a_i) = \sigma^{-1} (1 \dots i) \sigma$

$$= \underbrace{\sigma^{-1}(12)\sigma} \underbrace{\sigma^{-1}(23)\sigma} \dots \underbrace{\sigma^{-1}(i-1 i)\sigma}$$

Or $\sigma^{-1}(ij)\sigma = (\sigma(i)\sigma(j))$ est une transposition toujours

* $(ij) = (1i)(1j)(1i)$ donc une transposition quelconque est produit de transpositions de la forme $(1a)$

$$* 2 \leq i \leq n \Rightarrow (1 i) = (i-1 i) \dots (12) \dots (i-1 i)$$

$$* (i-1 i) = (1 \dots n)^{i-2} (12) (1 \dots n)^{n-i+2}$$

② De même, comme τ_4 ne commute ni avec τ_3 ni avec τ_2

$$\text{alors } \text{supp}(\psi(\tau_4)) \cap \text{supp}(\psi(\tau_3)) \neq \emptyset$$

$$\text{supp}(\psi(\tau_4)) \cap \text{supp}(\psi(\tau_2)) \neq \emptyset$$

$$\text{Supposons par l'absurde que } \underbrace{\text{supp}(\psi(\tau_4)) \cap \text{supp}(\psi(\tau_3))}_{a_1, a_3} \cap \underbrace{\text{supp}(\psi(\tau_2))}_{a_1, a_2} = \emptyset$$

$$\text{Alors } \psi(\tau_4) = (a_2 a_3)$$

$$\text{donc } \psi(\tau_2 \tau_3 \tau_4) = (a_1 a_2)(a_1 a_3)(a_2 a_3) = (a_3 a_1) = \psi(\tau_3)$$

$$\text{donc } \tau_2 \tau_3 \tau_4 = \tau_3 \text{ ce qui est faux}$$

$$\text{Donc } a_1 \in \text{supp}(\psi(\tau_4)) \text{ donc } \exists a_1 \neq a_3, a_2, a_3 \mid \psi(\tau_4) = (a_1 a_2)$$

③ $\psi \in \text{Aut}(G)$; $n \in G \mid |n| = h$

$$\text{Alors } \psi(n^h) = id = \psi(n)^h \text{ donc } |\psi(n)| \leq h$$

$$\psi(n)^{h-1} = \psi(n^{h-1}) \neq id \text{ donc } |\psi(n)| = h$$

④ Szpiroglas p. 265 Soient $(a_1 \dots a_p), (b_1 \dots b_p)$ deux p -cycles de S_n
Si $\forall i \in \{1, \dots, p\} \mid \tau(a_i) = b_i$ alors

$$\tau(a_1 \dots a_p) \tau^{-1} = (b_1 \dots b_p)$$

donc les p -cycles sont conjugués.

De plus, la classe de $\tau \in S_n$ est déterminée par la suite des ordres des cycles dans sa décomposition en cycles disjoints.

La somme des ces ordres vaut n et à chaque suite $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ non ordonnée / $x_1 + \dots + x_k = n$, correspond une unique classe de conjugaison.

⑤ Démonstration p. 32 Soit $n \in G$, soit C_n sa cdc.

Soit $y \in C_n$ alors $\exists a \in G \mid y = a n a^{-1}$. Comme φ est un morphisme, $\varphi(y) = \varphi(a) \varphi(n) \varphi(a)^{-1} \in \varphi(C_n)$ donc $\varphi(C_n) \subset C_{\varphi(n)}$.

Soit $y \in C_{\varphi(n)}$ alors $\exists a \in G \mid y = a \varphi(n) a^{-1}$. On pose $b = \varphi^{-1}(a)$ de sorte que $\varphi(b n b^{-1}) = a \varphi(n) a^{-1} = y$ donc $C_{\varphi(n)} \subset \varphi(C_n)$.

$$\begin{aligned} \textcircled{6} \quad \frac{n!}{2^k k! (n-2k)!} &= \frac{n(n-1)}{2} =, \frac{(n-2)!}{k! (n-2k)!} = 2^{k-1} \\ &=, (n-2) \times \dots \times (n-k+1) \times \frac{n-k!}{k! (n-2k)!} = (n-2) \times \dots \times (n-k+1) \\ &\quad \times \binom{n-k}{k} = 2^{k-1} \end{aligned}$$