Théorème fondamental de l'algèbre : Gourdon p. 84 125 - 144

Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ / $\deg(P) \geq 1$ admet une racine dans $\mathbb{C}$.

Démonstration : 1) On commence par montrer le résultat pour $P \in \mathbb{R}[X]$ / $\deg(P) = 2^n q = d$ où q est impair et $d \geq 1$

On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

* $n = 0$ alors $\deg(P) = q$ est impair.

Donc $P(x) \sim x^q \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

$\xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$

donc $\exists a \in \mathbb{R}_+$ / $P(-a) < 0$, $P(a) > 0$. Comme la fonction polynôme P est continue sur $\mathbb{R}$, par le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists c \in]-a, a[$ / $P(c) = 0$

* On suppose le résultat vrai jusqu'à un rang $n-1 \geq 0$.

Il existe une extension $\mathbb{K}$ de $\mathbb{C}$ et $x_1, \dots, x_d \in \mathbb{K}$ tels que

$P = \prod_{i=1}^{d} (X - x_i)$. (1)

Pour tout $c \in \mathbb{R}$, $\forall 1 \leq i < j \leq d$, on pose $y_{i,j}(c) = x_i + x_j + c x_i x_j$

Montrons que $\forall c \in \mathbb{R}$, $\exists (i_c, j_c)$ / $y_{i_c, j_c}(c) \in \mathbb{C}$

Soit $c \in \mathbb{R}$, soit $Q = \prod_{1 \leq i < j \leq d} (X - y_{i,j}(c))$

les coefficients de Q sont des polynômes symétriques à coefficients réels en les x_i donc Q est de polynômes à coefficients réels en les fonctions symétriques élémentaires des x_i qui sont eux-même les coefficients de P donc réels (2). Ainsi : $Q \in \mathbb{R}[X]$

$$\deg(Q) = \text{card}\left(\{(i,j) \,/\, 1 \leq i < j \leq d\}\right) = \frac{d(d-1)}{2} = \frac{2^n q (d-1)}{2}$$

$$= 2^{n-1} \underbrace{q(d-1)}_{\text{impair}}$$

donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à Q :

$\exists (i_c, j_c) / y_{i_c, j_c}(c) \in \mathbb{C}$

Montrons que $x_{i_c} + y_{i_c}$ et $x_{i_c} y_{i_c} \in \mathbb{C}$

Soit $\Gamma = \{(i,j) / 1 \leq i < j \leq d\}$ par le qui précède : il existe une application $\mathbb{N} \to \Gamma$, $c \mapsto (i_c, j_c)$ / $\forall c \in \mathbb{N}$, $y_{i_c, j_c}(c) \in \mathbb{C}$

Comme $\mathbb{N}$ est infini et Γ est fini, l'application n'est pas injective donc $\exists c' \neq c \in \mathbb{N}$ / $(i_{c'}, j_{c'}) = (i_c, j_c)$

On pose $(r, s) = (i_c, j_c)$

Comme $(x_r + x_s) + c\, x_r x_s \in \mathbb{C}$ et $(x_r + x_s) + c'\, x_r x_s \in \mathbb{C}$ alors

$S = x_r + x_s \in \mathbb{C}$ et $P = x_r x_s \in \mathbb{C}$

x_r et x_s sont les racines de $X^2 - SX + P \in \mathbb{C}[X]$ et donc

$x_r, x_s \in \mathbb{C}$.

Finalement P a une racine complexe (même 2).

2) Conclusion : on veut montrer le résultat dans $\mathbb{R}[X]$

Soit $F = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in \mathbb{C}[X]$; $\overline{F} = \sum_{i=0}^{d} \overline{a_i} X^i$

On voit que $F\overline{F} \in \mathbb{R}[X]$ donc P admet au moins une racine

donc $\alpha \in \mathbb{C}$; donc $F(\alpha)\overline{F}(\alpha) = 0$

Si $F(\alpha) = 0$ on a terminé

Sinon $\overline{F}(\alpha) = 0 \Rightarrow \overline{F(\alpha)} = 0$

$= F(\overline{\alpha})$ ☒

① Soit $F \in K[X]$ / $\deg(F) \geq 1$. Alors il existe une extension L de K sur laquelle F est scindé.

Démonstration : Par rec sur $\deg(F) = n$.

* $n = 1$ OK

* On suppose le résultat vrai jusqu'à un rang $n-1 \geq 1$

Soit G un facteur irréductible de F (existe car $\mathbb{K}$ corps $\Rightarrow$ $\mathbb{K}[X]$ factoriel) soit H / $F = GH$.

G étant irréductible, $\exists \mathbb{L}_1 | \mathbb{K}$ dans laquelle G admet une racine a_1 : ① $G = (X-a_1)G_1$ où $G_1 \in \mathbb{L}_1[X]$

donc $F = (X-a_1)F_1$ où $F_1 \in \mathbb{L}_1[X]$

Comme $\deg(F_1) = n-1$, par hyp de rec, $\exists \mathbb{L} | \mathbb{L}_1$ dans laquelle F_1 est scindé sur $\mathbb{L}$. Donc F est scindé dans $\mathbb{L}[X]$.

① Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, irréductible dans $\mathbb{K}[X]$. Alors $\exists \mathbb{L} | \mathbb{K}$ tq P admette une racine x dans $\mathbb{L}$.

Démonstration : $\mathbb{L} = \mathbb{K}[X]/(p)$ est un corps ①. L'injection canonique $\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{L} = \mathbb{K}[X]/(p)$ permet d'identifier les éléments de $\mathbb{K}$ et $\varphi(\mathbb{K})$

$a \mapsto \bar{a}$

Ainsi, $\mathbb{L}$ est une extension de $\mathbb{K}$.

En posant $a = \bar{X} \in \mathbb{L}$; on voit que $P(x) = P(\bar{X}) = \bar{P}(\bar{X}) = 0$

② Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ / $\deg(P) \geq 1$; l'anneau $\mathbb{K}[X]/(p)$ est un corps ssi P est irréductible.

Démonstration : ($\Rightarrow$) Si P est réductible alors $\exists Q, R \in \mathbb{K}[X]$ / $P = QR$, $1 \leq \deg(Q), \deg(R) < \deg(P)$. Donc $\bar{0} = \bar{Q}\bar{R}$ avec $\bar{Q} \neq \bar{0}$ et $\bar{R} \neq \bar{0}$ (CONT)

($\Leftarrow$) Supposons P irréductible. Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ / $\bar{A} \neq \bar{0}$ alors $P \wedge A$ et P irr $\Rightarrow P \wedge A = 1 \Rightarrow \exists U, V \in \mathbb{K}[X]$ / $AU + PV = 1 \Rightarrow$ $\bar{A}\bar{U} = \bar{1} \Rightarrow \bar{A}$ est inversible ; ici $\forall \bar{A} \neq \bar{0}$ donc $\mathbb{K}[X]/(p)$ est un corps.

(2) Soit A un anneau commutatif unitaire. Soit $P \in A[X_1, \dots, X_n]$ un polynôme symétrique dans $A[X_1, \dots, X_n]$. Alors $\exists ! \Phi \in A[X_1, \dots, X_n]$ / $P = \Phi(\Sigma_1, \dots, \Sigma_n)$

Polynômes symétriques élémentaires : On appelle poly sym élém de $A[X_1, \dots, X_p]$ le poly Σ_p déf par : $\Sigma_p = \sum_{i_1 < \dots < i_p} X_{i_1} \times \dots \times X_{i_p}$

En particulier :
$$\begin{cases} \Sigma_1 = \sum_{i_1=1}^{n} X_{i_1} = X_1 + \dots + X_n \\ \Sigma_2 = \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} X_{i_1} X_{i_2} \\ \vdots \\ \Sigma_n = \sum_{1 = i_1 < \dots < i_n = n} X_{i_1} \dots X_{i_n} = X_1 \times \dots \times X_n \end{cases}$$

Il vient : $(X - X_1) \times \dots (X - X_n) = X^n - \Sigma_1 X^{n-1} + \Sigma_2 X^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} \Sigma_{n-1} X + (-1)^n \Sigma_n$

En particulier, si $P \in K[X]$ est scindé sur K de racines $x_1, \dots, x_n$; alors $\forall i \in \{1 \dots n\}$; $(-1)^i a_i = \Sigma_i(x_1, \dots, x_n)$

$$\left(\Sigma_i(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \le h_1 < \dots < h_i \le n} x_{h_1} \times \dots \times x_{h_i} \right)$$

Déf : $Q = \pi(X - y_{i,j}(c)) = X^t - \Sigma_1 X^{t-1} + \dots + (-1)^t \Sigma_t$

où $\Sigma_h = \Sigma_h(y_{i,j}(c) ; 1 \le i < j \le d)$

$= \Sigma_h(\underbrace{x_i + x_j + c x_i x_j}_{} ; 1 \le i < j \le d)$

$= (-1)^2 \Sigma_2 + (-1)^1 \Sigma_1 c = \Sigma_2 - c\Sigma_1$ donc $\begin{matrix} \Sigma_1 = x_i + x_j \\ x_i x_j = -\Sigma_2 \end{matrix}$

$P = \pi(X - x_i) = X^d - \Sigma_1^* X^{d-1} + \dots + (-1)^d \Sigma_d^* = X^d + a_1 X^{d-1} + \dots + a_0$

où $a_i = (-1)^n \Sigma_i^*(x_1, \dots, x_d) \in A$

donc $\xi_i^{\wedge}(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}$