

Soit $T_s = \{ T \in \text{GL}(k) \mid T \text{ est triangulaire supérieure} \}$

Alors : 1) $\text{GL}(k) = \bigcup_{\sigma \in S_n} T_\sigma P_\sigma T_\sigma$ ①

2) L'action de $\text{GL}(k)$ sur $\mathcal{D}$ ② définie par $A \cdot (f_0, \dots, f_n) = (A(f_0), \dots, A(f_n))$ est transitive ③ et $\mathcal{D} \simeq \text{GL}(k) / T_s$

3) le nombre d'orbites de l'action de $\text{GL}(k)$ sur $\mathcal{D}$ est $n!$

Démonstration: 1) Existence: on construit un algorithme qui transforme $A \in \text{GL}(k)$ en une matrice de permutation ④

En multipliant A à gauche et à droite par des matrices de transposition et de dilatation bien choisies, qui sont dans T_s , on obtient

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} (*) = T_1 A T_2 \quad \text{où } T_1, T_2 \in T_s$$

On itère le procédé jusqu'à la dernière colonne et on obtient

$$A_1 = P_\sigma = T_1' A T_2' \quad \text{où } T_1', T_2' \in T_s$$

Unicité: on suppose que $A = T_1 P_\sigma T_2 = T_1' P_\tau T_2'$

$$\text{Alors } T P_\sigma = P_\tau T' \quad \text{où } T, T' \in T_s$$

La colonne j de $T P_\sigma$ est la colonne $\sigma(j)$ de T donc pour $i > \sigma(j)$

$$(T P_\sigma)_{i,j} = 0. \text{ De même, } (P_\tau T')_{i,j} \text{ est le coefficient } (T')_{j,i} \neq 0$$

(car $T' \in \text{GL}(k)$) donc $\tau(j) \leq \sigma(j)$, $\tau(j) = \sigma(j)$.

2) Soit $d = (f_0, \dots, f_n)$ un drapeau. On peut trouver $(f_1, \dots, f_n)$ une base adaptée à d ⑤. On note A l'unique matrice inversible telle que $A(e_i) = f_i$ où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de k^n

Donc $A \cdot d = d$ où d est le drapeau canonique de E ⑥

Ainsi, l'action est transitive donc $\mathcal{D} \simeq \text{GL}(k) / \text{Stab}(d)$

Or $A \cdot g = g \Leftrightarrow A \in T_0$. ² Par $\mathcal{D} \cong \text{Gn}(K)/T_0$.

3) G est isomorphe ; on identifie $d \in \mathcal{D}$ avec $\bar{B} \in \text{Gn}(K)/T_0$.

Soient $X, Y \in \text{Gn}(K)$; alors $(\bar{X}, \bar{Y}) = X(\bar{\text{Id}}, \bar{Y}^{-1}Y)$

par 1), $\exists T_1, T_2 \in T_0$ / $X^{-1}Y = T_1 R T_2$

alors $(\bar{X}, \bar{Y}) = X(\bar{\text{Id}}, \overline{T_1 R T_2}) = X T_1 (\bar{T}_1^{-1}, \bar{R} \bar{T}_2) = X T_1 (\bar{\text{Id}}, \bar{R})$

Une suite orbitale contenant un élément de la forme $(\bar{\text{Id}}, \bar{R})$

de plus, P est défini de manière unique pour une orbitale car

$(\bar{\text{Id}}, \bar{P}) = A(\bar{\text{Id}}, \bar{R}) \Rightarrow A \in T_0$ et $\exists T \in T_0$ / $A T = P T$

Et par unicité dans 1) ; alors $\sigma = \tau$.

alors $|G/T_0| = |S_n| = n!$ $\square$

① Remis p. 19 P est la matrice de passage de $BC = (e_1, \dots, e_n)$ à $be = (e_{\sigma(i)})$; $P e_i = e_{\sigma(i)}$

$$a = \sum_{i=1}^n a_i e_i, \quad P a = \sum_{i=1}^n a_i P e_i = \sum_{i=1}^n a_i e_{\sigma(i)} = \sum_{i=1}^n a_{\sigma^{-1}(i)} e_i$$

changement d'indice $k = \sigma(i)$

$P: S_n \rightarrow \text{Gn}(K)$ morphisme de gp injectif ; $\det(P) = \varepsilon(\sigma)$
 $\sigma \mapsto P_\sigma$

② Isomorphisme $\mathcal{D} = \{\text{drapeaux de } E\}$

Un drapeau complet est une suite $\uparrow$ strictement d'ec $(A_0, \dots, A_n)$ in

$$\{0\} = A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq \dots \subsetneq A_n = E$$

③ Remis p. 22 $\forall d, d' \in \mathcal{D}, \exists A \in \text{Gn}(K) / A \cdot d = d'$

Action 2-transitive : $\forall (d_1, d'_1), (d_2, d'_2) ; \exists A /$
 $\begin{cases} A \cdot d_1 = d'_1 \\ A \cdot d_2 = d'_2 \end{cases}$

④ Gaussmann: Operation élémentaire: (E_{ij}) BC de $M_n(k)$

* Transvection: $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$; $i < j \in T_S$

$$T_{ij}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & \lambda \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \leftarrow i \begin{matrix} \uparrow \\ j \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \lambda & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplication à gauche: $T_{ij}(\lambda)A \Leftrightarrow A$ subit $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

_____ droite: $AT_{ij}(\lambda) \Leftrightarrow A$ subit $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$

* Dilatation: $D_i(\alpha) = I_n + (\alpha - 1)E_{ii} \in T_S$

$$D_i(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix} + (\alpha - 1) \begin{bmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

_____ : $D_i(\alpha)A \Leftrightarrow A$ subit $L_i \leftarrow \alpha L_i$

_____ : $AD_i(\alpha) \Leftrightarrow A$ subit $C_i \leftarrow \alpha C_i$

Existence: $A \in M_n(k) \rightarrow C_1$ admet un élément non nul

on note i_1 le pre^{er} indice $k \mid a_{k,i_1} \neq 0$

on multiplie A à gauche par des T_{h,i_1} avec $h < i_1$ pour annuler les autres coeff de C_1 ,

on multiplie à droite par $D_1(\frac{1}{a_{i_1,i_1}})$ pour normaliser.

on multiplie à droite par des $T_{i_1,h}$; $h \geq 2$ pour annuler les coeff de la ligne i_1

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ 0 & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \leftarrow i_1$$

Soit A_1 la matrice obtenue après cette étape. Alors $A_1 \in M_n(k)$

ou les $T_{ij}, D_i \in M_n(k)$

On pose i_1 le plus grand i tel que $a_{i,1} \neq 0$

On a: $i_1 \neq i_2$ car $a_{i_2,1} = 0$ par l'étape précédente

on refait le raisonnement.

On construit une suite strictement croissante d'entiers entiers $i_1, \dots, i_n$

En notant $\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$; la matrice A_n
$$h \mapsto \sigma(h) = i_h$$

obtenue à la fin de A

⑤ Si $(f_1, \dots, f_n)$ est une base de E ; on pose $F_i = \text{Vect}(f_1, \dots, f_i)$

Alors $d = (f_0, \dots, f_n)$ est un drapeau.

Réciproquement, étant donné $d = (f_0, \dots, f_n) \in \mathcal{D}$, l'hypothèse de la base incomplète permet de trouver $(f_1, \dots, f_n)$ base de E telle que $F_i = \text{Vect}(f_1, \dots, f_i)$. Une telle base est dite adaptée au drapeau d .

⑥ On considère $\text{Bn}(K)$ comme l'ensemble des bases de $E = K^n$.

on a def $\ell: \text{Bn}(K) \rightarrow \mathcal{D}$ surjective

$$A = (C_1, \dots, C_n) \mapsto (\text{Vect}(C_1, \dots, C_i))_{0 \leq i \leq n}$$

pour $e = (e_1, \dots, e_n) \in \text{BC}$, on note $\ell = \ell(e)$ le drapeau canonique de E

⑦ $A \cdot d = d \iff (A(f_0), \dots, A(f_n)) = (f_0, \dots, f_n)$

$\iff \forall i, A(f_i) = f_i \iff f_i$ est stable par $A \forall i$

$\iff A \in \text{TS}$.