Optimisation dans un espace de Hilbert : Brezis p. 335 -213-219-223-229-253-267

Soit H un espace de Hilbert ① et $J : H \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, continue et coercive ②. Alors $\exists a \in H$ / $J(a) = \inf_H J$

Démonstration : Soit $(x_k)_k \in H^{\mathbb{N}}$ / $J(x_k) \to \inf_H J$

Supposons par l'absurde que $(x_k)_k$ n'est pas bornée. Alors $\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\|x_{\varphi(k)}\| \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$. Par coercivité de J, $J(x_{\varphi(k)}) \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$ ce qui est impossible.

Donc $\exists C > 0$ / $\|x_k\| \leq C$ $\forall k \in \mathbb{N}$. (*)

Soit $u = (\langle x_0, x_k \rangle)_k$; par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$|\langle x_0, x_k \rangle| \leq \|x_0\| \|x_k\| \leq C^2$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass ③ : $\exists \varphi_0$ une extraction (ie $\varphi_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante) telle que $(u_{\varphi_0(k)})_k$ converge (dans $\mathbb{R}$)

Par récurrence, on suppose avoir construit $\varphi_0, \dots, \varphi_i$ des extractions telles que $(\langle x_i, x_{\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_i(k)} \rangle)_k$ converge.

La suite $(\langle x_{i+1}, x_{\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_i(k)} \rangle)_k$ est bornée comme par u donc par le théorème de Bolzano-Weierstrass, $\exists \varphi_{i+1}$ une extraction telle que $(\langle x_{i+1}, x_{\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_{i+1}(k)} \rangle)_k$ converge.

On crée ainsi une suite d'extractions $(\varphi_i)_i$.

On définit $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $k \mapsto \varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_k(k)$. Ainsi : $(\langle x_i, x_{\psi(k)} \rangle)_k$ converge pour tout i car $(\psi(k))_{k \geq i}$ est une suite extraite de $(\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_i(k))_k$ $\forall i$.

Posons $F = \mathrm{Vect}(x_p, p \in \mathbb{N})$ alors par linéarité, $\forall a \in F$, $(\langle a, x_{\psi(k)} \rangle)_k$ converge (de même)

On définit alors $y = (x_{\psi(k)}) \in H^{\mathbb{N}}$. Montrons que $\forall u \in H$, la suite $(\langle u, y_k \rangle)_k$ converge. Soient $u \in H$, $\varepsilon > 0$, d'après le théorème de projection sur un sev fermé $\bar{F} \supset F$ ④, $\exists a \in \bar{F}$, $w \in F^\perp$ / $u = a + w$

de plus, $\exists \tilde{v} \in F \mid \|v - \tilde{v}\| \leq \varepsilon$.

Soit $k, l \in \mathbb{N}$, on a : $|\langle u, y_k - y_l \rangle| = |\langle v+w, y_k - y_l \rangle|$ Vect$(x_n)_n$

$= |\langle v, y_k - y_l \rangle|$ car $\begin{cases} y_k, y_l \in F \\ w \in F^\perp \end{cases}$

$= |\langle v - \tilde{v} + \tilde{v}, y_k - y_l \rangle|$

$\leq \|v - \tilde{v}\| \|y_k - y_l\| + |\langle \tilde{v}, y_k - y_l \rangle|$

Comme $(\langle \tilde{v}, y_k \rangle)_k$ converge (par (***)) alors elle est de Cauchy donc

$\exists N \in \mathbb{N} \mid \forall k, l \geq N, \ |\langle \tilde{v}, y_k - y_l \rangle| \leq \varepsilon$. Ainsi, $\forall k, l \geq N$,

$|\langle u, y_k - y_l \rangle| \leq \varepsilon(\|y_k\| + \|y_l\|) + \varepsilon \leq 2C\varepsilon + \varepsilon$ par (*)

donc $(\langle u, y_k \rangle)_k$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ qui est complet donc elle converge.

Soit $\gamma : H \to \mathbb{R}$; par linéarité de $H \to \mathbb{R}$ et par unicité de la limite
$u \mapsto \lim_{k \to +\infty} \langle u, y_k \rangle$ $x \mapsto \langle x, y_k \rangle$

d'une suite convergente : γ est une forme linéaire

De plus, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\gamma(u)| = |\lim_{k \to +\infty} \langle u, y_k \rangle|$

$\leq C\|u\|$ pour $u \in H$

donc γ est continue.

Par le théorème de Riesz (5) : $\exists a \in H \mid \gamma(u) = \langle a, u \rangle$.

Ainsi, $\lim_{k \to +\infty} \langle u, y_k \rangle = \langle u, a \rangle$

Il reste à montrer que le minimum de J sur H est bien atteint en a.

Soit $\beta > \inf_H J$. On définit $C_\beta = \{x \in H \mid J(x) \leq \beta\}$

Comme C_β est un convexe fermé non vide de H, $d(x, C_\beta)$ est toujours atteinte en un unique point (6) d'après le théorème de projection sur un convexe fermé

On note $p : H \to C_\beta$ l'application projection sur C_β.

Comme $J(x_k) \to \inf_H J$ alors $J(y_k) \to \inf_H J$. Ainsi, $\exists N \in \mathbb{N} \mid \forall k \geq N$,

$y_k \in C_\beta$ donc $\forall k \geq N$, $\langle y_k - p(a), a - p(a) \rangle \leq 0$ (7)

Or $\langle y_n, a-p(a)\rangle \to \langle a, a-p(a)\rangle$ donc $\|a-p(a)\| \leq 0$

donc $a = p(a)$ donc $a \in C_\beta$. Ainsi, $J(a) \leq \beta \forall p > \inf_K J$

donc $J(a) = \inf_K (J)$ ■

① Beck p. 91 Un esp $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est dit préhilbertien s'il est muni d'un PS

S'il est complet pour la norme associée au PS on dit qu'il est hilbertien.

Rq : Pour toute norme, un ev de dim finie est complet

Donc un esp préhilb de dim $< \infty$ est hilb. On parle alors d'espace euclidien ou hermitien.

② Ischebeck p. 335 $f : X \to \mathbb{R}$ (X espace normé) est dite coercive ssi $\forall n > 0, \exists r > 0$

tq $\|x\| \geq r \Rightarrow f(x) \geq n$

③ Gourdon p. 28 Un espace métrique (E,d) est compact ① ssi de toute suite de E, on peut en extraire une sous-suite convergente

Démo : $BW \Leftrightarrow BL$ ①

$\Leftarrow$ Soit $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$; tq on note $A_p = \{x_n, n \geq p\}$

$(\overline{A_p})_p$ est ↓ de fermés non vides donc ② $\bigcap_{p \in \mathbb{N}} \overline{A_p} \neq \emptyset$. Soit $x \in \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \overline{A_p}$

On construit $(x_{\varphi(n)})_n$ comme : $\begin{cases} x_{\varphi(0)} \in A_0 \\ x_{\varphi(n+1)} \in A_{n+1} \text{ / } \varphi(n+1) > \varphi(n) \text{ et } d(x_{\varphi(n+1)}, x) < \frac{1}{2^{n+1}} \end{cases}$

(C'est possible car $x \in \overline{A_{n+1}}$)

Ainsi, $(x_{\varphi(n)})_n$ est une sous-suite qui CV vers x

$\Rightarrow$ Soit (O_i) recouvrement de E par des ouverts alors ③ $\exists \alpha > 0$ /

$\forall x \in E, \forall i \in I, B(x,\alpha) \subset O_i$

Comme BW ④ $\Rightarrow$ précompact, $\exists n, \exists x_1 \dots x_n \in E$ / $E = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \alpha)$

Et $\forall j$, $\exists i_j \in I$ / $B(x_j, \alpha) \subset O_{i_j}$ donc $E = \bigcup_{j=1}^{n} O_{i_j}$ ■

④ Beck p. 98 Projection sur un sous-espace fermé : $(H, \langle .,. \rangle)$ hilbert,
↳ donc convexe

F sev fermé de H ; pour $x \in H$, $p_F(x)$ est l'unique élément $p \in F$ tel que : $\begin{cases} \bullet\ p \in F \\ \bullet\ x - p \in F^\perp \end{cases}$

De plus, $p_F : \begin{array}{ccc} H & \to & F \\ x & \mapsto & p_F(x) \end{array}$ est linéaire, continue et surjective

Et $H = F \oplus F^\perp$ ($\forall x \in H$, $x = \underbrace{x-p}_{\in F^\perp} + \underbrace{p}_{\in F}$, p unique)

$p_{F^\perp}$ est bien def car $F^\perp$ est un convexe fermé : $F^\perp = \{ x \in H \mid \forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0 \}$
↑ $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

⑤ Beck p. 103 Théorème de Riesz : $(H, \langle .,. \rangle)$ hilbert - Hors.

$\Phi : \begin{array}{ccc} H & \to & H^* \\ y & \mapsto & (x \mapsto \langle x, y \rangle) \end{array}$ est une isométrie surjective de H sur H^*

Ainsi, $\varphi \in H^*$ continue $\Rightarrow \exists y \in H \mid \varphi(x) = \langle x, y \rangle \ \forall x \in H$

De plus : $\|\varphi\|_{H'} = \|y\|$.

④

⑥ Beck p. 97 Théorème de projection sur un convexe fermé : $(H, \langle .,. \rangle)$ hilbert

C convexe fermé non vide de H, alors $\forall x \in H$, $\exists ! p \in C \mid d(x, C) = d(x, p)$
où $d(x, C) = \inf_{y \in C} d(x, y)$

p est appelé projection de x sur C, noté $p_C(x)$

Ainsi : $\forall y \in C$, $\|x - p_C(x)\| \leq \|x - y\|$

De plus : $p_C(x) \in C$, $\mathrm{Re}(\langle x - p_C(x), y - p_C(x) \rangle) \leq 0 \ \forall y \in C$.