

Générateurs des isométries vectorielles : p.223 Isermann (61-159).

Soient E un n -ev euclidien et $u \in O(E)$ une isométrie de E .

En notant $r = \operatorname{rg}(u - \operatorname{id})$ on a alors :

1) u est produit d'au moins r réflexions

2) si $u \in SO(E)$ et $\dim(E) \geq 3$ alors u est produit d'au plus r retournements.

Démonstration : 1) Par récurrence sur r .

* si $r=0$ alors $u = \operatorname{id}$ est produit de zéro réflexions

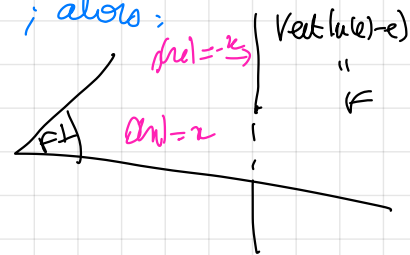
* Soit $r \geq 1$ / la propriété est vraie $\forall u \in O(E)$ / $\operatorname{rg}(u - \operatorname{id}) < r$

Soit $u \in O(E)$ / $\operatorname{rg}(u - \operatorname{id}) = r$. Comme $u \neq \operatorname{id}$; $\exists e \in E$ de norme 1 tq $u(e) \neq e$.

Alors : $(u(e) - e) \perp (u(e) + e)$ car $(u(e) - e) \cdot (u(e) + e) = \|u(e)\|^2 - \|e\|^2 = 0$ car $u \in O(E)$

Soit s la réflexion par rapport à $[\operatorname{Vect}(u(e) - e)]^\perp$; alors :

$$\begin{cases} s(u(e) + e) = u(e) + e \\ s(u(e) - e) = -(u(e) - e) \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} s(e) = u(e) \\ s(u(e)) = e \end{cases}$$



Montrons que $\operatorname{rg}(s \circ u - \operatorname{id}) < r$

$$\Rightarrow \operatorname{rg}(s \circ u - \operatorname{id}) < \operatorname{rg}(u - \operatorname{id})$$

Par cela, on montre que $\operatorname{Ker}(u - \operatorname{id}) \not\subseteq \operatorname{Ker}(s \circ u - \operatorname{id})$

(c) Soit $x \in \operatorname{Ker}(u - \operatorname{id})$ ie $u(x) = x$; $s \circ u(x) = s(x)$

Il suffit de montrer que $s(x) = x$ ie $x \in [\operatorname{Vect}(u(e) - e)]^\perp$

$$\begin{aligned} \langle x, u(e) - e \rangle &= \langle x, u(e) \rangle - \langle x, e \rangle = \langle u(x), u(e) \rangle - \langle x, e \rangle \\ &= \langle x, e \rangle - \langle x, e \rangle = 0 \end{aligned}$$

En plus : $s \circ u(e) = e$ et $u(e) \neq e$ donc l'induction est stricte.

Pourc $\operatorname{rg}(v - \operatorname{id}) < r$. Par hypothèse de récurrence : $\exists p < r$ et $s_1, \dots, s_p$ des réflexions de E telles que $v = s_1 \circ \dots \circ s_p$

donc $so u = s_1 \circ \dots \circ s_p$ donc $u = \underset{=s}{s^{-1}} \circ s_1 \circ \dots \circ s_p$

Montrons que r est minimal : soit $u \in SO(E)$ un produit de p réflexions : $u = s_1 \circ \dots \circ s_p$ où s_i est la réflexion de E par rapport à l'hyperplan H_i . On a : $H_1 \cap \dots \cap H_p \subset \ker(u - id)$ ^① et $\dim(H_1 \cap \dots \cap H_p) \geq n - p$ ^② d'où $n - p \leq n - r$
donc $r \leq p$.

pas forcément le temps.

2) Soit $u \in SO(E)$ alors $u = s_1 \circ \dots \circ s_r$ où s_i est une réflexion H_i . Comme $\det(u) = 1$ et $\det(s_i) = -1$ alors r doit être pair.

Il suffit de montrer que le produit de 2 réflexions est la composition d'au plus 2 rotations. ^③

Soient s_1, s_2 deux réflexions par rapport à H_1, H_2

Si $H_1 = H_2$ alors $s_1 \circ s_2 = id$ ^④ qui est la composition de 0 rotation

sinon, $\dim(H_1 + H_2) = n$ d'où $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$

Comme $\dim(E) \geq 3$; $\exists V \subset H_1 \cap H_2$ sur de dimension $n - 3$

$\forall i \in \{1, 2\}$, on définit p_i par $p_i = s_i$ sur V et $p_i = -s_i$ sur $V^\perp$ de sorte que $s_1 \circ s_2 = p_1 \circ p_2$ ^⑤

Or p_i est la rotation par rapport à $V \oplus H_i^\perp$. En effet :

* sur V , $p_i(u) = s_i(u) = u$

* sur $H_i^\perp$, $p_i(u) = -s_i(u) = -(-u) = u$

* sur $\hat{V}$, $p_i(u) = -s_i(u) = -u$ ^⑥

$(V + H_i^\perp)^\perp = V^\perp \cap H_i$

$\begin{matrix} \swarrow \text{dim } 2 \\ \uparrow \text{dim } n-3 \\ \text{dim } n-2 \rightarrow \text{rotation } 2 \end{matrix}$

① $u = s_1 \circ \dots \circ s_p$; si réflexion / H_i hyp $\rightarrow \begin{matrix} s_i(u) = u & \text{si } u \in H_i \\ s_i(u) = -u & \text{si } u \in H_i^\perp \end{matrix}$

Soit $x \in H_1 \cap \dots \cap H_p$ alors $u(x) = x = s_1 \circ \dots \circ s_p(x) = x$
 $= x - x = 0$

② Gramman par récurrence sur p :

* Si $p=1$, alors $\dim(K_2) = \dim(E) - 1$ par def d'hyper

* On suppose le résultat vrai jusqu'à un rang p . Soient $K_1, \dots, K_{p+1}$ de l'hyper de E . On pose $F = \bigcap_{i=1}^p K_i$. Par la formule de Grassman:

$$\dim(F) + \dim(K_{p+1}) = \dim(F + K_{p+1}) + \dim(F \cap K_{p+1})$$

Par l'h.c. et par def d'hyper,

$$\dim(E) - p + \dim(E) - 1 \leq \dim(F + K_{p+1}) + \dim(F \cap K_{p+1})$$

$$\text{Comme } F + K_{p+1} \subset E; \dim(F + K_{p+1}) \leq \dim(E)$$

$$\text{donc } \dim(E) - (p+1) \leq \dim(F \cap K_{p+1}) \quad \square$$

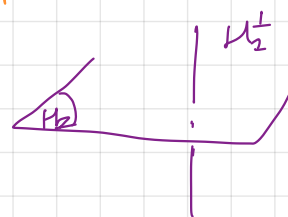
③ $n = n_1 \circ \dots \circ n_r$ par 1) où n_i est une réflexion

On a un r doit être pair; $n = \underbrace{(n_1 \circ n_2) \circ (n_3 \circ n_4) \dots \circ (n_{r-1} \circ n_r)}$

si on montre que chaque couple

est produit d'un plus 2 rotations carr

ou



④ s_1, s_2 réflexion $|K_1, K_2$

Si $K_1 = K_2$, $s_1 \circ s_2(x) = n(-x) = x$ si $x \in K_1^\perp = K_2^\perp$

$$n \circ n(x) = s_1(s_2(x)) = x \quad \text{si } x \in K_1 = K_2$$

donc $n \circ n = id$

⑤ $p_1 = n_1$ sur V et $p_1 = -n_1$ sur $V^\perp$

$$p_2 \circ p_1 = \begin{cases} n_1 \circ n_2 \text{ sur } V \\ -n_1 \circ (-n_2) = n_1 \circ n_2 \text{ sur } V^\perp \end{cases}$$

⑥ $W_i = V^{\perp K_i}$; un p_i est le retournement par rapport à $V \oplus K_i^\perp$

Codim de $V \oplus K_i^\perp$? $V \subset K_1 \cap K_2$ sur de dim $n-3$

$$n-3 \quad \rightarrow \quad n-2 \quad \text{ok.}$$

$$* \text{ sur } V: \quad p_i(x) = \pi(x) = x \quad \text{car } x \in H_2 \cap H_2^\perp$$

$$* \text{ sur } H_i^\perp: \quad p_i(x) = -\pi(x) = -(-x) = x \quad \text{car } x \in H_i^\perp$$

$$\uparrow$$

$$H_i^\perp \subset V^\perp$$

$$* \text{ sur } (V + H_i^\perp)^\perp = H_i: \quad p_i(x) = -\pi(x) = -x$$

$$\uparrow \quad \quad \quad \uparrow$$

$$V^\perp \cap H_i \quad \quad \quad x \in V^\perp \quad \quad \quad x \in H_i$$

perin
p.122