Quaternions et groupe orthogonal : Perrin p. 163 | D1 - 106 - 108 - 154 - 160 - 161 - 191
Szpirglas p. 354

12:23

Soit : $\begin{cases} \mathbb{H} \text{ le corps de quaternions } (1) \\ G \text{ le groupe des quaternions de norme 1 } (4) \\ P \text{ l'espace des quaternions purs } (3) \\ N : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ \quad q \longmapsto q\bar{q} = \bar{q}q = a^2+b^2+c^2+d^2 \end{cases}$ une norme sur $\mathbb{H}$. (2)

Alors : $G/\{\pm 1\} \simeq O_3^+(\mathbb{R})$ (5)

Démonstration : On considère l'action par conjugaison (6) $S : G \to \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$
$q \mapsto S_q : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$
$q' \mapsto qq'q^{-1}$
$= qq'\bar{q}$ (7)

qui est un morphisme de groupe par définition d'une action.

Son noyau est : $\ker(S) = \{q \in G \mid S_q = id_{\mathbb{H}}\}$
$= \{q \in G \mid \forall q' \in \mathbb{H},\ qq'q^{-1} = q'\} = Z(\mathbb{H}) \cap G = \mathbb{R} \cap G$ (8)
$= \{\pm 1\}$

Par ailleurs, S_q conserve la norme : $N(S_q(q')) = N(q')$. En effet :

$N(S_q(q')) = N(qq'\bar{q}) \overset{(9)}{=} N(q)N(q')N(\bar{q}) = N(q')$ car $q, \bar{q} \in G$.
$\quad\quad = 1 \quad\quad\quad = 1$

(10)

Donc $S_q \in O(\mathbb{H}) \simeq O_4(\mathbb{R})$

De plus, P est stable par S_q, $\forall q \in G$. En effet : soient $q \in G$, $q' \in P$,

$\mathrm{Re}(S_q(q')) = \mathrm{Re}(qq'\bar{q}) = \dfrac{qq'\bar{q} + \overline{qq'\bar{q}}}{2} = \dfrac{qq'\bar{q} - qq'\bar{q}}{2} = 0$ (11)

On pose alors $s_q = S_q|_P$ ~~et comme $\mathbb{R}$ est l'orthogonal de P et que~~

~~$S_q|_{\mathbb{R}} = id_{\mathbb{R}}$~~ (12) alors $s_q \in O(P) \simeq O_3(\mathbb{R})$ et on pose $s : G \to O_3(\mathbb{R})$

le morphisme associé, qui est de noyau $\ker(s) = \{q \in G \mid s_q = id_P\}$

de norme 1
remarque du théorème qui commutent avec ceux de P donc avec ceux de $\mathbb{H}$

$= \{q \in G \mid \forall q' \in P,\ qq'\bar{q} = q'\}$
$= Z(\mathbb{H}) \cap G = \mathbb{R} \cap G = \{\pm 1\}$

(13)

Montrons que $\mathrm{Im}(s) = O_3^+(\mathbb{R})$.

© On sait $O_3(\mathbb{R})$ comme ker de $\det : M_3(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^9$. Donc ici, s est

Comme $\mathrm{Nat}_{(i,j,k)}(bq)$ est une homogène de deg 2 en a,b,c et d ($q = a+ib+jc+kd$) (14) : les coefficients sont des polynômes

Or $\det : O_3(\mathbb{R}) \to \{\pm 1\}$ est continue donc $\det \circ s : G \to \{\pm 1\}$ est continue. Comme (15) $G \simeq S^3$, donc G est connexe et donc $\det \circ s(G)$ est un singleton

De plus, $s(1) = s_1$; $\forall q \in P$, $s_1(q) = 1 \cdot q \cdot 1 = q$ donc $s(1) = id$

donc $\det \circ s(G) = \{1\}$ d'où $\mathrm{Im}(s) \subset O_3^+(\mathbb{R})$.

(2) Montrons que s est surjectif. Il suffit de montrer que tous les retournements (16) sont atteints (17). Soit r_v un retournement d'axe $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ et on identifie v à $iv_1 + jv_2 + kv_3 \in P$ ↳ noté v.

On peut supposer v unitaire de sorte que $v \in P \cap G$ (18)

On a donc $N(v) = v\bar{v} = 1$ et $\bar{v} = -v$ d'où $v^2 = -1$ et $(s_v)^2 = s_{v^2} = s_{-1} = id_P$

Or $s_v \in O_3^+(\mathbb{R})$ donc s_v est une symétrie orthogonale et il reste à montrer que l'espace fixé est une droite. $\mathrm{Sp}(s_v) \subset \{\pm 1\}$ et comme $\det(s_v) = 1$ alors -1 est de multiplicité paire et 1 impaire :

$s_v = id_P$ ou $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

Comme $v \in P$ et $\ker(s) \cap P = \phi$ alors $v \notin \ker(s)$ donc $s(v) \neq id_P$
$\overline{= \{\pm 1\}}$

Donc 1 est de multiplicité 1 donc s_v est un retournement qui fixe v ($s_v(v) = v v \bar{v} = v$) alors $s_v = r_v$.

finalement : $s(G) = O_3^+(\mathbb{R})$ et donc $\bar{s} : G/\{\pm 1\} \to O_3^+(\mathbb{R})$ est un isomorphisme.

① Perin $\exists\, \mathbb{H}$ une $\mathbb{R}$-alg de dim 4 munie d'une base $(1, i, j, k)$ tq :

(i) 1 est neutre pour $\times$

(ii) $i^2 = j^2 = k^2 = -1$; $ij = -ji = k$; $jk = -kj = i$; $ki = -ik = j$

$\mathbb{R} \simeq$ vect des quatrions $a \cdot 1$, $a \in \mathbb{R}$

$q \in \mathbb{H}$ s'écrit : $q = a + ib + jc + kd$; $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Idée : Trouver une repr de $\mathbb{H}$ comme sous-alg de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. On reprend la construct° effectuée et on fait agir $\mathbb{H}$ sur lui-même par mult à gauche : $T_q(q') = qq'$; T_q est linéaire et

$$\mathrm{Mat}_{(1,i,j,k)}(T_q) = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} \begin{matrix} /1 \\ /i \\ /j \\ /k \end{matrix}$$

$T_q(1)$ $T_q(i)$ $T_q(j)$ $T_q(k)$

On a alors $\mathbb{H}$ comme l'ensemble des mat de cette forme

② $N(q) \in \mathbb{R}_+$ car $\overline{q}\,\overline{q} = q\overline{q} \in \mathbb{R}$ et en calculant cela vaut $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$; $q \mapsto \overline{q}$ est un anti-auto ($\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2}\,\overline{q_1}$)

En effet : $\mathrm{Mat}(T_{\overline{q}}) = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix} = {}^t\mathrm{Mat}(T_q)$

Et $\mathrm{Mat}(T_{\overline{q_2}\,\overline{q_2}}) = {}^t\mathrm{Mat}(T_{q_1 q_2})$ $\quad T_{q_1 q_2}(q) = q_1 q_2 q = T_{q_2}(q_1 q)$

$= {}^t\mathrm{Mat}(T_{q_2})\,{}^t\mathrm{Mat}(T_{q_1})$ $\quad = T_{q_1} \circ T_{q_2}(q)$

$= \mathrm{Mat}(T_{\overline{q_2}})\,\mathrm{Mat}(T_{\overline{q_1}})$

$= \mathrm{Mat}(T_{\overline{q_2}\,\overline{q_1}})$

Rq : $q \mapsto N(q)$ est une FQE sur $\mathbb{H}$ de FP $\varphi(q_1, q_2) = \frac{1}{2}(q_1\overline{q_2} + q_2\overline{q_1})$

(la base $(1, i, j, k)$ est ON vis à vis de N et $q \mapsto \overline{q}$ est une sym ortho d'axe

propre $\mathbb{K}$ et $P = \{q = bi+cj+dk,\ b,c,d \in \mathbb{R}\}$ ($q \in P \Leftrightarrow \overline{q} = -q$)

Rq : $\mathbb{H}$ est un corps : $N(q) = 0 \Leftrightarrow q = 0$ donc si $q \neq 0$, q a un inverse

$q^{-1} = \frac{1}{N(q)}\overline{q} = \underbrace{N(q)^{-1}}_{\in \mathbb{R}}\overline{q} = \overline{q}\,N(q)^{-1}$

(7) (9)

(4) $N(q_1 q_2) = q_1 q_2 \overline{q_1 q_2} = q_1 q_2 \overline{q_2}\,\overline{q_1} = q_1 \underbrace{N(q_2)}_{\in \mathbb{R}}\overline{q_1} = N(q_1)N(q_2)$

Donc $N : \mathbb{H}^* \to \mathbb{R}_+^*$ est un morph de gp

De est surjectif : soit $a > 0$; $N(\sqrt{a}) = a$

$\ker(N) = \{q \in \mathbb{H}^* \mid N(q) = 1\} = \{q = a+ib+jc+kd \mid a^2+b^2+c^2+d^2 = 1\}$

$=: G$

Rq : si $q \in G$, $N(q) = 1 = q\overline{q}$ donc $\overline{q} = q^{-1}$

(5) Rouvière p. 180 E ev préhilb réel ; $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, les prop suivantes sont eq :

(i) u conserve la norme

(ii) u conserve le PS

(iii) u admet un adjoint u^* tq $u^* = u^{-1}$ $\left[(u(x)|y) = (x|u^{-1}(y))\right]$

Si u vérifie (i), (ii) ou (iii) on dit que u est un auto orthog et on note $O(E)$ l'ensemble de ces endos. C'est un groupe

Si E est euclidien donc de dim finie : pour $u \in \mathcal{L}(E)$ alors

$u \in O(E) \Leftrightarrow u$ conserve la norme

Rop : $u \in \mathcal{L}(E)$, E euclidien, il y a eq entre :

(i) $u \in O(E)$

(ii) l'image d'une BON est une BON

(iii) $\exists$ BON de E dont l'image par u est une BON

Thm : E esp euclidien ; $\det : O(E) \to \{\pm 1\}$ ($\subset \mathbb{R}^*$) est un morphisme de gp

de noyau $O^+(E) = SO(E)$ = gp des rotations de E (isométries positives).
↓ $\det = 1$

Ex : 1) Si $\dim(E)$ est paire ; $-id_E \in O^+(E)$

2) Si $\dim(E)=3$, toute sym orth par rapport à une droite vectorielle (retournement) appt à $O^+(E)$: la mat de cette sym dans une BON adaptée est $\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$

3) Toute sym orth hyperplane (réflexion) appt à $O^-(E)$

Prop : Si $\lambda \in Sp(u)$, $u \in O(E)$ alors $\lambda = \pm 1$

Prop : $P \in M_n(\mathbb{R})$, les prop suivantes sont eq :

(i) $P \in O_n(\mathbb{R})$

(ii) $P {}^tP = I_n$ (ii)' ${}^tPP = I_n$

(iii) les vecteurs lignes forment une BON (iii)' " " colonne.

⑥ Rem $S_q : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ est bijective. ($q \in \mathbb{H}^*, q' \in \mathbb{H}$)

En effet : $S_q \circ S_{\bar q}(q') = S_q(\bar q q' q) = q\bar q q' q \bar q = \underbrace{N(q)}_{=1} q' N(q) = q'$

donc $S_{\bar q} = (S_q)^{-1}$ donc $S_q \in Aut(\mathbb{H})$

⑧ $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$. $\{q \in \mathbb{H} \mid \forall q' \in \mathbb{H}, q'q = qq'\}$

⑨ (inclusion) Soit $q = a+ib+jc+kd \in Z(\mathbb{H})$ alors $qi = iq$ donc

$ai - b - kc + jd = ai - b + kc - jd$ donc $c = d = 0$

De même : $qj = jq$ donc $b = 0$ donc $q = a \in \mathbb{R}$

⑩ $\mathbb{R} \subset Z(\mathbb{H})$ car $\mathbb{H}$ est une $\mathbb{R}$-alg.

⑪ $q \mapsto N(q)$ FQE sur $\mathbb{H}$; $s \in O(\mathbb{H}) \iff s$ conserve la norme

Or S_q conserve la norme donc $S_q \in O(\mathbb{H})$

$O(\mathbb{H}) \xrightarrow{\sim} O_4(\mathbb{R})$
$S_q \mapsto Mat_{(i,j,k)}(S_q)$

(11) Noter $\varphi(a,q) = \frac{1}{2}(aq + q\bar{a}) = \frac{1}{2}(-aq + qa) = 0$

($a \in \mathbb{R}$, $q \in P$)

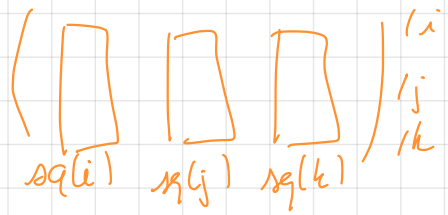
Donc $\mathbb{R} \perp P$.

(12) $\mathrm{Sq}(a) = qaq = aqq = a \in \mathbb{R}$

($q \in G$, $a \in \mathbb{R}$)

(13) Commute avec tout P $\Leftrightarrow$ commute avec tout H

(14) Noter $(i,j,k)(q) =$



$i\ j\ k$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sq}(i) = qi\bar{q} &= (a+ib+jc+kd)\,i\,(a-ib-jc-kd) \\
&= (ai - b - kc + jd)(a - ib - jc - kd) \\
&= (a^2 i + ba - bjc - kbd) + (-ba + ib^2 + jcb + kdb) \\
&\quad + (-kac - jcb - ic^2 - cd) + (jda + kdb + cd - id^2) \\
&= i(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) + j(da - db) + k(db - ac)
\end{aligned}$$

(15) Sauf S^{n-1} est connexe par arcs

Soient a, b non antipodaux, $\gamma : [0,1] \to S^{n-1}$, $t \mapsto \frac{(1-t)a + tb}{\|(1-t)a + tb\|}$

Comme $\|a\| = \|b\| = 1$: $(1-t)a + tb = 0 \Rightarrow 1 - t = t \Rightarrow t = \frac{1}{2}$ ce qui est exclu car $a \neq -b$

Donc a et b sont reliés par γ

Si $a = -b$, on passe par un autre point.

$G = \{ q \in H \mid N(q) = 1 \} \simeq S^3 = \{ x \in \mathbb{R}^4 \mid \|x\| = 1 \}$

$G \longrightarrow S^3$

$q = a + ib + jc + kd \mapsto (a,b,c,d)$

(16) Perrin p. 124 rotation = ilôt pos

retournement = ilôt neg

* Ex d'isom : symétrie

Si $u \in GL(E)$ est tq $u^2 = id_E$ alors $X^2 - 1 = (X+1)(X-1)$ annule u

donc $Sp(u) \subset \{\pm 1\}$

donc $E = E_1 \oplus E_{-1}$ et $Mat(u) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$ dans une base $e_1, \dots, e_n$ en

tq $e_1, \dots, e_p \in E_1$; $e_{p+1}, \dots, e_n \in E_{-1}$

Si $u \neq id$; u est une involution = symétrie

- Si $\dim(E_{-1}) = 1$; u est une réflexion
- Si $\dim(E_{-1}) = 2$, u est un renversement

* Symétries orthogonales

u est une isométrie ortho si $E = E_1 \overset{\perp}{\oplus} E_{-1}$

Dans ce cas : $E_1 = E_{-1}^{\perp}$ et $E_{-1} = E_1^{\perp}$

- Si u est une réflexion ortho, u est dite par rapport au plan E_1 ou par sa droite E_{-1} ; on la note $u = \tau_P$ ou τ_D

Si u est une réflexion alors $u \in O^-(q)$

- Si u est un renversement ortho, u est dite par rapport au plan E_{-1}

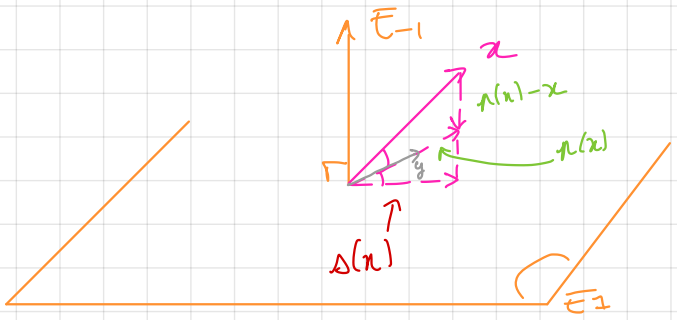
Si u est un renversement ortho alors $u \in O^+(q)$

Réflexion : dim 3

p est la projection orthogonale sur E_1 parallèlement à E_{-1}

$p(x) = \varphi(x,y) \frac{y}{q(y)}$

où y est vecteur de E_1



s est la réflexion par rapport au plan E_1 (de droite E_{-1})

$s(x) = p(x) + p(x) - x = 2p(x) - x$

$= 2\varphi(x,y)\frac{y}{q(y)} - x$

Vérification : * p : $p(p(x)) = p\left(\varphi(x,y)\frac{y}{q(y)}\right) = \frac{\varphi(x,y)}{q(y)} p(y)$

$= \frac{\varphi(x,y)}{q(y)} \varphi(y,y) \frac{y}{q(y)} = \varphi(x,y)\frac{y}{q(y)} = p(x)$

Donc $p \circ p = p$.

* s : $s(s(x)) = s\left(2\varphi(x,y)\frac{y}{q(y)} - x\right) = 2\frac{\varphi(x,y)}{q(y)} s(y) - s(x)$

$= 2\frac{\varphi(x,y)}{q(y)}\left(2\varphi(y,y)\frac{y}{q(y)} - y\right) - 2\varphi(x,y)\frac{y}{q(y)} + x$

$= 2\frac{\varphi(x,y)}{q(y)} y - 2\varphi(x,y)\frac{y}{q(y)} + x = x$

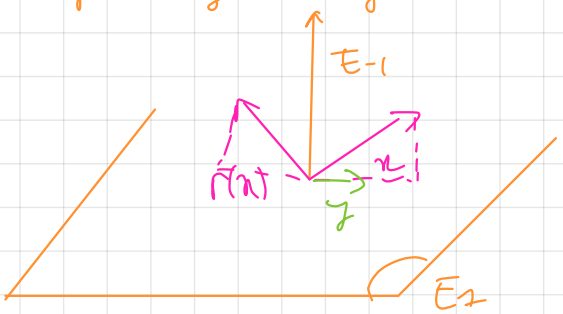
Donc $s^2 = id$

- si $x \in E_{-1}$, $s(x) = -x$
- si $x \in E_1$, $s(x) = 2\varphi(x \wedge y, y)\frac{y}{q(y)} - x \wedge y$

$x \wedge y$

$= 2x \wedge y - x \wedge y = x \wedge y = x$

Renversement :



$r(x) = x - 2p(x)$

$= x - 2\frac{\varphi(x,y)}{q(y)} y$

$r(r(x)) = r\left(x - 2\frac{\varphi(x,y)}{q(y)} y\right) = x - 2\frac{\varphi(x,y)}{q(y)} y - 2\frac{\varphi(x,y)}{q(y)}(y - 2y)$

$= x$

Donc $r^2 = id$

- si $x \in E_{-1}$: $r(x) = x$
- si $x \in E_1$: $r(x) = x_1 y + x_2 z - 2\frac{\varphi(x_1 y + x_2 z, y)}{q(y)} y$

$x_1 y + x_2 z$

$= x_1 y + x_2 z - \frac{2}{q(y)}\left[x_1 q(y) + x_2 \underbrace{\varphi(y,z)}_{=0}\right] y$

$= -n_1 y + n_2 z$

Terminer !

(17) Voir fraunion 3 p. 51.

(18)