

Prolongement de la fonction gamma d'Euler:

ZQ p. 312
Beck p. 82

207 - 237 - 239 -
241 - 245 - 265

(2.21)

Soit $\Gamma: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{C}$

$$z \mapsto \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

$$\text{où } \mathbb{P} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$$

Alors Γ se prolonge en une fonction analytique sur $\mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}$

Démonstration:

1) Montrons que Γ est bien définie sur $\mathbb{P}$

Soit $z \in \mathbb{P}$

* Si $t \in]0, 1[$,

$$- |e^{-t} t^{z-1}| \leq |t^{z-1}| = |t^{\operatorname{Re}(z)-1 + i\operatorname{Im}(z)}| = t^{\operatorname{Re}(z)-1}$$

$$- t^{\operatorname{Re}(z)-1} > 0$$

$$- t \mapsto t^{\operatorname{Re}(z)-1}$$

$$|e^{[\operatorname{Re}(z)-1 + i\operatorname{Im}(z)] \ln(t)}| = e^{[\operatorname{Re}(z)-1] \ln(t)} = t^{\operatorname{Re}(z)-1}$$

est intégrable au sens de Riemann sur $]0, 1[$ car $\operatorname{Re}(z)-1 > -1$

* Si $t \in]1, \infty[$

$$- |e^{-t} t^{z-1}| = e^{-t} t^{\operatorname{Re}(z)-1} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

$$- \frac{1}{t^2} > 0$$

$$- t \mapsto \frac{1}{t^2} \text{ est intégrable sur }]1, \infty[$$

Finalement: Γ est bien définie sur $\mathbb{P}$.

2) Montrons que Γ est holomorphe sur $\mathbb{P}$:

Appliquons le théorème d'holomorphic sous le signe $\int$:

$$- \forall z \in \mathbb{P}, t \mapsto f(z, t) \in L^2([0, \infty[) \text{ d'après 1)}$$

$$- \forall t \in]0, \infty[, z \mapsto f(z, t) \text{ est holomorphe sur } \mathbb{P} \text{ car}$$

$$f(z, t) = e^{-t} t^{z-1} = e^{-t} e^{(z-1)\ln(t)} \text{ et } z \mapsto e^{z\ln(t)} \text{ est holomorphe sur } \mathbb{C}.$$

$$- \text{Soit } K \text{ un compact de } \mathbb{P} \text{ tel que } \forall z \in K, \operatorname{Re}(z) \in [\varepsilon, \eta] \text{ où}$$

$0 < \varepsilon < \eta$. Alors:

* $\forall t \in]0, 1[$:

- $|e^{-t} e^{(z-1) \ln t}| \leq e^{(\varepsilon-1) \ln t} = t^{\varepsilon-1}$
- $t^{\varepsilon-1} > 0$
- $t \mapsto t^{\varepsilon-1} \in L^1(]0, 1[)$ car $\varepsilon-1 > -1$

* $\forall t \in]1, \infty[$:

- $|e^{-t} e^{(z-1) \ln t}| \leq e^{-t} e^{(N-1) \ln t} \underset{t \rightarrow \infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$
- $\frac{1}{t^2} > 0$
- $t \mapsto \frac{1}{t^2} \in L^1(]1, \infty[)$

Finalement: Γ est holomorphe sur $\mathbb{P}$.

3) Exprimer Γ à l'aide d'une srie:

Soit $z \in \mathbb{P}$, $\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$

$\forall t \in]0, 1[$, $e^{-t} t^{z-1} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-t)^n}{n!} t^{z-1} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1}$

on veut appliquer le thorme de Fubini. Pour cela, montrons que

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^\infty \left| \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1} \right| dt < \infty.$$

Soit $t \in]0, 1[$, $\sum_{n=0}^\infty \left| \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1} \right| = \sum_{n=0}^\infty \frac{t^{n+\operatorname{Re}(z)-1}}{n!}$
 $= e^t t^{\operatorname{Re}(z)-1} \in L^1(]0, 1[)$
 car $\operatorname{Re}(z)-1 > -1$

Donc $\int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{n+z-1} dt = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$
 $\uparrow$ $\operatorname{Re}(z) > 0 \Rightarrow z \neq -n$

4) Montrons que $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$z \mapsto \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$$

est holomorphe sur $\mathbb{C}$

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n: z \mapsto \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ avec pour pte

Simple - n.

- Soit k un compact de $\mathbb{C}$. Alors $\exists N \in \mathbb{N} / k \subset \overline{D(0, N)}$

Pour $n > N$, f_n n'a pas de pôle dans k . De plus, $\forall z \in k$, on a:

$$|z+n| > n - |z| > n - N \quad \text{Donc } |f_n(z)| \leq \frac{1}{n!(n-N)} \quad \forall z \in k \text{ et}$$

Donc $\sum_{n \geq N} f_n$ CVN sur k $\sum_{n \geq N} \frac{1}{n!(n-N)}$ converge par D'Alembert

Donc f est méromorphe sur $\mathbb{C}$, d'après la théorie de dérivation terme à

termes de séries de fonctions méromorphes. (2)
Donc f est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (théorème de prolongement analytique de Γ sur l'ouvert connexe $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (3))

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (z+n)} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

analytique de Γ sur l'ouvert connexe $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (3)

① Théorème d'holomorphie sur le ligne $\int$:

Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, X un espace métrique et $f: \Omega \times X \rightarrow \mathbb{C}$ tq:

$$- \forall z \in \Omega, x \mapsto f(z, x) \in L^1(X)$$

$$- \mu \text{ pp } x \in X, z \mapsto f(z, x) \in \mathcal{H}(\Omega)$$

$$- \forall K \subset \Omega \text{ compact, } \exists g \in L^1(X) \text{ positive } |f(z, x)| \leq g(x) \text{ } \mu \text{ pp } x \in X$$

et $\forall z \in \Omega$.

$$\text{Alors } F: z \mapsto \int_X f(z, x) d\mu(x) \in \mathcal{H}(\Omega) \text{ et } F'(z) = \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(z, x) d\mu(x)$$

② Dérivation terme à terme des séries de fonctions méromorphes:

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions méromorphes sur U

si $\forall k \subset U$, $\exists N \in \mathbb{N} / \forall n > N$, f_n n'a pas de pôle dans k et si

$$\sum_{n \geq N} f_n \text{ CVN sur } k, \text{ alors } z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \text{ est méromorphe sur } U \text{ et}$$

$\downarrow$
l'écrit sans sur un ensemble

de pts isolés, pôle de la fct

on peut dériver terme à terme

3) Théorème de prolongement analytique: Soit U un ouvert connexe. Si 2 fcts analytiques coïncident sur $\mathcal{D}(U)$ ayant un point d'accumulation dans U , alors elles sont égales sur U .

↓
 x pt d'acc de $A \cap U$
si $x \in \overline{A \cap U}$

4)