

Théorème de Dunford et exponentielle de matrice: Lambaldi p. 853 153-154-690 155-156-157
(11.27)

1) Théorème de décomposition de Dunford: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ / χ_u est scindé sur K .

Alors: $\exists! (d, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ / d est diagonalisable, v est nilpotent, $dv = vd$ et $u = d + v$.

de plus, d et v sont des polynômes en u .

2) Soit $A \in \text{Mat}(K)$ / χ_A est scindé sur K , soit $A = \overset{\text{de } A}{D} + V$ la décomposition de Dunford. Alors la décomposition de Dunford est: $e^A = e^D + e^D (e^V - I_n)$

Démonstrations: 1) Existence: On note $N_h = \text{Ker}((u - \lambda_h \text{id}_E)^{m_h})$ pour

$m_h = \deg(P)$ où P est un polynôme annulateur de u . (1)

$\Rightarrow$ donc $u N_h \subseteq N_h$ (2)

Alors π_h, N_h est stable par u donc $v_h = (u - \lambda_h \text{id}_E)|_{N_h} \in \mathcal{L}(N_h)$ et nilpotent (3)
car $\forall x \in N_h (u - \lambda_h \text{id}_E)^{m_h}(x) = 0$ car $N_h = \text{Ker}((u - \lambda_h \text{id}_E)^{m_h})$

En notant $d_h = \lambda_h \text{id}_E|_{N_h}$ alors $u|_{N_h} = d_h + v_h$ avec d_h diagonalisable

et v_h nilpotent et $d_h v_h = v_h d_h$

poly en u ; $(K[u])$ commut.

On pose: $\begin{cases} d = \sum_{h=1}^p \lambda_h \pi_h \\ v = u - d \end{cases}$ où π_h est le projecteur de E sur N_h

(comme π_h est un polynôme en u d'après d et v comm.)

d est diagonalisable de mêmes valeurs propres que u car $d = d_h = \lambda_h \text{id}_E|_{N_h}$ sur N_h et $E = \bigoplus N_h$; v est nilpotent car $v = v_h$ sur N_h et $vd = dv$

car $d, v \in (K[u])$ où $(K[u])$ est une algèbre commutative. (6)

de plus: $u = d + v$.

Unicité: Soit (d', v') un autre couple vérifiant la condition.

Comme $u = d' + v'$; $d'v' = v'd'$ alors d' et v' commutent avec u

donc avec d et v car u est tout le polynôme en u .

On a donc $d' - d$ est diagonalisable, en fait que comme de deux endomorphismes diagonalisables qui commutent. $\rightarrow$ diago, $\exists P \in \text{GL}(n) / U = P D P^{-1}$
 $U^q = P D^q P^{-1} = 0$

de même: $v - v'$ est nilpotent. D'où: $d' - d = v - v' = 0 \Rightarrow \overset{\text{diago}}{D} = 0 = D^q$

2) Comme $DV = VD$, on a : $e^A = e^D e^V$ avec $e^V = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{V^k}{k!}$ car V est d'ordre q .

On peut écrire :
$$e^A = e^D \times \sum_{k=0}^q \frac{V^k}{k!} = e^D \left(I_n + V \sum_{k=1}^q \frac{V^{k-1}}{k!} \right)$$
$$= e^D + V \underbrace{e^D \sum_{k=1}^q \frac{V^{k-1}}{k!}}_{W} = e^D + VW$$

Comme V est nilpotente d'ordre q et $VW = WV$, alors $(VW)^q = V^q W^q = 0$ et VW est nilpotente.

Comme D est diagonalisable, alors e^D l'est aussi ⑧

Comme la décomposition de Dunford est unique, on a ici la décomposition de e^A .

Et donc : $e^A = e^D + e^D(e^V - I_n)$ est la décomposition de Dunford de e^A ■

① ② ③ ⑤ on suppose μ le polynôme de u sur K . $\swarrow$ alg des

- $\mu(x) = \prod_{h=1}^p (x - \lambda_h)^{\beta_h}$ avec $\beta_h \in \mathbb{N}^*$; $\lambda_h \in K$ $\forall h$ et $\lambda_i \neq \lambda_j$; $h \in \{1, \dots, p\}$
- $\chi_h(x) = \prod_{k=1}^p (x - \lambda_k)^{\alpha_{hk}}$ avec $1 \leq \beta_h \leq \alpha_{hh}$; $h \in \{1, \dots, p\}$

Sous-espace associé : $\text{Ker}((u - \lambda_h \text{id})^{\alpha_{hh}})$ où $h \in \{1, \dots, p\}$.

• $P(x) = \prod_{k=1}^p (x - \lambda_k)^{m_k}$; $\beta_h \leq m_h$; $h \in \{1, \dots, p\}$

$N_h = \text{Ker}((u - \lambda_h \text{id})^{m_h})$; $h \in \{1, \dots, p\}$

Théorème : 1) $E = \bigoplus_{h=1}^p N_h$ 2) $N_h = \text{Ker}((u - \lambda_h \text{id})^{\beta_h})$ $\swarrow$ mult de λ_h comme racine de μ

3) N_h est stable par u et λ_h est la seule VP de $u|_{N_h}$

4) $\dim(N_h) = \alpha_{hh} \leq$ mult de λ_h comme racine de χ_u

5) $(u - \lambda_h \text{id})|_{N_h}$ est nilp d'indice β_h .

Démonstration : $\{0\} \neq \text{Ker}(u - \lambda_h \text{id}) \subset N_h$ donc $N_h \neq \{0\}$ et

1) Théorème de décomposition des noyaux : $P(u) = 0$

$\Leftrightarrow \prod_{k=1}^p (x - \lambda_k)^{m_k} = 0$ où $\forall h \neq j$ $(x - \lambda_h \text{id})^{m_h} \wedge (x - \lambda_j \text{id})^{m_j} = 1$

ou $\lambda_h \neq \lambda_j$

$$\text{donc } \bigoplus_{h=1}^p \underbrace{\ker((u - \lambda_h \text{id})^{m_h})}_{N_h} = \ker(\varphi) = E$$

2) Notons $\Gamma_h = \ker((u - \lambda_h \text{id})^{\beta_h})$; $\Gamma_h \subset N_h$ ou $\beta_h \leq m_h$

$$\text{et on a : } E = \bigoplus_{h=1}^p N_h = \bigoplus_{h=1}^p \Gamma_h$$

$$\text{donc : } \begin{cases} 1 \leq \dim(\Gamma_h) \leq \dim(N_h) \\ n = \sum_{i=1}^p \dim(N_h) = \sum_{i=1}^p \dim(\Gamma_h) \end{cases} \text{ dans } \mathbb{N}^+$$

$$\text{donc } \dim(\Gamma_h) = \dim(N_h) \text{ donc } N_h = \Gamma_h$$

3) Comme $\mathbb{K}[u]$ est commutatif, N_h est stable par u .

Soit $x \in N_h$, montrons que $u(x) \in N_h$.

$$(u - \lambda_h \text{id})^{\beta_h} (ux) = 0 \Rightarrow u \circ (u - \lambda_h \text{id})^{\beta_h} (x) = 0$$

$$\Rightarrow (u - \lambda_h \text{id})^{\beta_h} (ux) = 0$$

$$\Rightarrow (u - \lambda_h \text{id})^{\beta_h} (ux) = 0 \Rightarrow u(x) \in N_h$$

$$\text{donc } u|_{N_h} \in \mathcal{L}(N_h)$$

Si $\lambda \neq \lambda_j$ est une VP de $u|_{N_h}$ alors λ est VP de u et $\exists j \in \{1, \dots, p\} /$

$$\lambda = \lambda_j \text{ et } \exists x \in N_h \setminus \{0\} / (u - \lambda_j \text{id})x = 0$$

Alors $x \in N_h \cap N_j \setminus \{0\}$ donc $h = j$ ou $N_h \cap N_j = \{0\}$; $h \neq j$.

$$4) \text{ On note } \lambda_h = \dim(N_h)$$

$$\text{Alors } \chi_{u|_{N_h}}(x) = (x - \lambda_h)^{\lambda_h}, \text{ comme } E = \bigoplus N_h \text{ et } N_h \text{ est stable par } u$$

$$\text{donc } \chi_u = \prod_{h=1}^p \chi_{u|_{N_h}} \text{ et } \lambda_u = n$$

$$7) \text{ On note } w_h = (u - \lambda_h \text{id})|_{N_h} \in \mathcal{L}(N_h) ; w_h^{\beta_h} = 0 \text{ ou}$$

$$\text{Soit } x \in N_h, w_h^{\beta_h}(x) = (u - \lambda_h \text{id})^{\beta_h}(x) = 0$$

$$\Gamma N_h = \ker((u - \lambda_h \text{id})^{\beta_h})$$

$$\text{R: } \exists h / w_h^{\beta_h-1} = 0 \text{ alors } (x - \lambda_h)^{\beta_h-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq h}}^p (x - \lambda_j)^{\beta_j} \text{ annule } u \text{ car } \lambda$$

annule tous les u_j et $E = \bigoplus N_j$ ce qui contredit le fait que $\sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} (X - I_k)^{p-k}$ est le poly min de u . Donc $u^{p-1} \neq 0$ et u est n'esp d'indice fin $\square$

④ lemme: $\forall h, \exists$ le proj de E sur N_h parallèlement à $\bigoplus_{j \neq h} N_j$ est un poly en u . voir ③.

⑥ p. 679 $u^0 = id, \forall h, u^{h+1} = u^h \circ u$ donc $\forall p = \sum_{h=0}^p a_h x^h \in \mathbb{K}[X]$,
on déf $P(u) = \sum_{h=0}^p a_h u^h$

la sous-alg de $\mathcal{L}(E)$ engendrée par u est constituée des endo $P(u), P \in \mathbb{K}[X]$

On note cette alg $\mathbb{K}[u]$ qui est commutative: $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X],$

$$(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u) = (QP)(u)$$

$$\text{Comme } \dim(\mathcal{L}(E)) = n^2, \dim(\mathbb{K}[u]) \leq n^2$$

la famille $\{u^k, 0 \leq k \leq n^2\}$ est donc liée donc $\exists P \neq 0 / P(u) = 0$

$$\text{donc } I_u = \{P / P(u) = 0\} \neq \{0\}$$

$I_u = \ker \left(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{morphisme d'algèbre}}}{P \mapsto P(u)} \right)$ donc I_u est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ car $\mathbb{K}[X]$ est un anneau non constant

principal donc $I_u = \mathbb{K}[X] p_u$ pour un certain p_u appelé polynôme de u

⑦ Soit u diagonalisable et nilpotent. Montrons que $u = 0$.

$$\exists q / A^q = 0 ; \exists P, D / A = P D P^{-1} ; A^q = P D^q P^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow D^q = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow A = 0$$

⑧ A diag $\Rightarrow e^A$ diag

$$\begin{aligned} \exists P, D / A = P D P^{-1} \text{ alors } e^A &= e^{P D P^{-1}} = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(P D P^{-1})^h}{h!} \\ &= \sum_{h=0}^{+\infty} P \frac{D^h}{h!} P^{-1} = P \underbrace{e^D}_{\text{diagonale}} P^{-1} \end{aligned}$$

⑨ lemme de décomposition des noyaux: p. 685

Soient $P_1, \dots, P_p$ non nuls 2 à 2 1^{ers} entre eux ; $P = \prod_{h=1}^p P_h$; $\mu \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$

Alors $\ker(P^\mu) = \bigoplus_{h=1}^p \ker(P_h^\mu)$; les projecteurs $\pi_h \in \mathcal{L}(\ker(P_h^\mu))$

sont des éléments de $\ker(P^\mu)$.

lemme: Soient $P_1, \dots, P_p \neq 0$ 2 à 2 1^{ers} entre eux. Alors $Q_1, \dots, Q_p$ def par $Q_h = \prod_{j \neq h} P_j$ sont 1^{ers} entre eux dans leur ensemble, Et $P_h \wedge Q_h = 1$

En effet: $\Delta = \text{pgcd}(Q_1, \dots, Q_p)$ non constant $\Rightarrow$ il admet un diviseur irréductible R qui divise $Q_1 = \prod_{j=2}^p P_j$ donc l'un des P_j ; $j \neq 1$

Comme R divise aussi Q_j , et divise l'un des P_h , $h \neq j$ donc $P_h \wedge P_j \neq 1$

(cont).

Si $\Delta_h = \text{pgcd}(P_h, Q_h)$ non constant alors il admet un diviseur R_h qui div P_h et Q_h donc l'un des P_j ; $j \neq h$ donc $P_j \wedge P_h \neq 1$ (cont).

Démonstration: Par Bézout: $\exists R_1, \dots, R_p$ / $\sum_{h=1}^p R_h Q_h = 1$

donc $\text{id} = \sum_{h=1}^p R_h(u) \circ Q_h(u)$

donc $\forall u \in E$, $u = \sum_{h=1}^p R_h(u) \circ Q_h(u)(u)$

donc $\forall x \in \ker(P_h)$, $P_h(u) \left(\underbrace{R_h(u) \circ Q_h(u)(u)}_{= xu} \right) = R_h(u) \circ P_h(u)(u) = 0$

donc $xu \in \ker(P_h(u))$

donc $\ker(P_h(u)) \subset \sum_{i=1}^p \ker(P_i(u))$

comme $\ker(P_h(u)) \subset \ker(P(u))$ alors on a égalité.

Soit $(x_1, \dots, x_p) \in \prod_{i=1}^p \ker(P_i(u))$ / $\sum_{i=1}^p x_i = 0$

Alors $0 = Q_h(u) \left(\sum_{j=1}^p x_j \right) = Q_h(u)(x_h) + P_h(u)(x_h) = 0$

Comme $P_h \wedge Q_h = 1$ alors $\exists A, B$ / $A P_h + B Q_h = 1$

Et $A(u) \circ P_h(u) + B(u) \circ Q_h(u) = \text{id}$

donc $2x_h = (A(u) \circ P_h(u))(x_h) + (B(u) \circ Q_h(u))(x_h) = 0$

Donc $\chi_A(P(h)) = \bigoplus \chi_A(P(h))$

Et les projecteurs de $\chi_A(P(h))$ sur $\chi_A(P(h))$ sont les $\pi_h = P(h) \circ \text{Id}$ $\in K[A]$

En pratique: il faut calculer les projecteurs spectraux π_k .

À partir de la décomp en éléments simples de χ_A :

$$\frac{1}{\chi_A(x)} = \sum_{h=1}^p \sum_{i=1}^{m_h} \frac{\alpha_{hi}}{(x-\lambda_h)^i} = \sum_{h=1}^p \frac{Q_h(x)}{(x-\lambda_h)^{m_h}} \quad \text{où } Q_h(x) = \sum_{i=1}^{m_h} \alpha_{hi} (x-\lambda_h)^{i-1}$$

On note $P_h(x) = \frac{\chi_A(x)}{(x-\lambda_h)^{m_h}} = \prod_{j \neq h} (x-\lambda_j)^{m_j}$ et on aboutit à la décomp de

Bécart: $1 = \sum_{h=1}^p Q_h P_h$ qui permet d'obtenir: $\pi_h = (Q_h P_h)(u)$

Puis $u = d + v$ avec $d = \sum_{h=1}^p \lambda_h \pi_h$; $v = u - d$

La décomp de Dunford permet de calculer les puissances de u : comme d et v commutent, par le lemme de Newton, on a:

$$\forall r \geq 1, u^r = (d+v)^r = \sum_{h=0}^r \binom{r}{h} d^h v^{r-h}$$

On peut calculer d^r dans une base de diagonalisation ou en utilisant le

prop des projecteurs: $\forall r \geq 1, d^r = \left(\sum_{h=1}^p \lambda_h \pi_h \right)^r = \sum_{h=1}^p \lambda_h^r \pi_h$

$\pi_i \pi_h = \pi_h \pi_i = 0 \quad h \neq i; \quad \pi_h^2 = \pi_h$

le calcul des puissances de v ramène à v^{p-1}

$$\forall r \geq 1, v^r = \left(\sum_{h=1}^p (u - \lambda_h \text{Id}) \pi_h \right)^r = \sum_{h=1}^p (u - \lambda_h \text{Id})^r \pi_h$$

Exemple: $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \quad \chi_A = (x-a)(x-b)^2$

$$\frac{1}{\chi_A} = \frac{1}{(x-a)(x-b)^2} = \frac{\alpha}{x-a} + \frac{\beta}{x-b} + \frac{\gamma}{(x-b)^2}$$

$$\alpha = \frac{1}{(a-b)^2} \quad \beta = \frac{1}{b-a} \quad \gamma = -\frac{1}{ab^2} = \frac{\alpha}{-a} + \frac{\beta}{-b} + \frac{\gamma}{b^2} \quad \text{donc } \gamma = \frac{1}{ab} - \frac{\beta\alpha}{a} + \frac{\gamma}{b}$$

$$\text{donc } 1 = \beta^2 (x-b)^2 + \beta(1+\beta b - \beta x)(x-a) = \frac{(a-b)^2 - b^2 + ab(a)}{ab(a-b)^2} = \frac{-ab}{ab(a-b)^2}$$

$$\text{Et } \pi_a = \beta^2 (A - bI_3)^2; \quad \pi_b = \beta (I_3 + \beta b I_3 - \beta A) (A - aI_3) = I_3 - \pi_a \quad \frac{1}{(a-b)^2} = -\alpha$$

$$\text{Donc } \pi_a = \frac{1}{(b-a)^2} \begin{pmatrix} (b-a)^2 & -(b-a) & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{b-a} & \frac{1}{(b-a)^2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\pi_b = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{b-a} & -\frac{1}{(b-a)^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Si on } A = D + V \text{ où } D = a\pi_a + b\pi_b = \begin{pmatrix} a & 1 & -\frac{1}{b-a} \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

$$V = A - D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{b-a} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{on vérifie que } DV = VD$$

$$\alpha = \frac{1}{(b-a)^2} \quad ; \quad \beta = \frac{1}{b-a} \quad \gamma = -\alpha$$

$$(*) \quad \frac{1}{(x-a)(x-b)^2} = \frac{\beta^2}{(x-a)} + \frac{\beta}{(x-b)^2} - \frac{\beta^2}{(x-b)}$$

$$\Rightarrow 1 = \beta^2(x-b)^2 + \beta(x-a) - \beta^2(x-a)(x-b)$$

$$= \beta^2 \underbrace{(x-b)^2}_p + (\beta - \beta^2(x-b)) \underbrace{(x-a)}_q$$

$$x-a \text{ et } (x-b)^2 = 1$$

Donc c'est une identité de Bézout

$$id = \pi_a + \pi_b$$

$$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow$$

$$\beta^2(x-b)^2 \quad \quad \quad (\beta - \beta^2(x-b))$$

$$= id - \pi_a$$

$$d = a\pi_a + b\pi_b = a\pi_a + b(id - \pi_a) = (a-b)\pi_a + bid$$