Leçons :
234 : Espaces L^p
236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales.
239 : Intégrales dépendant d'un paramètre.
240 : Produit de convolution, transformée Fourier
254 : Espace $S(\mathbb{R}^d)$. Transformée Fourier dans S'

Inversion de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ ou $S(\mathbb{R}^d)$

8

Références : Faraut "Calcul intégral"
Jean Michel Bony "Cours d'analyse"
"Théorie des distributions et analyse de Fourier"
Claude Zuily "Eléments de distribution et d'équations aux dérivées partielles".

Thm : Soit $u \in S(\mathbb{R}^d)$, on définit $\hat{u}(y) = \mathcal{F}(u)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x) e^{-ixy} dx$

et $\overline{\mathcal{F}}(u)(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} u(y) e^{ix.y} dy$

Alors $\mathcal{F} \circ \overline{\mathcal{F}} = \overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = id_{S(\mathbb{R}^d)}$

preuve : Soit $\varepsilon > 0$, on pose $G_\varepsilon(x) = e^{-\varepsilon \|x\|^2}$ et $K_\varepsilon = \hat{G}_\varepsilon$. $\|.\|$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$.
On va calculer K_ε.

① Cas $d=1$:

$\forall y \in \mathbb{R}$ $K_\varepsilon(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} e^{-\varepsilon x^2} dx$

$x \mapsto x e^{-\varepsilon x^2} \in L^1(\mathbb{R})$ donc le théorème de dérivation sous l'intégrale s'applique

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad K_\varepsilon'(y) = \int_{\mathbb{R}} (-ix) e^{-ixy} e^{-\varepsilon x^2} dx$$

$$= i \left[\frac{e^{-\varepsilon x^2}}{2\varepsilon} e^{-ixy} \right]_{-\infty}^{+\infty} - i \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\varepsilon x^2}}{2\varepsilon} (-iy) e^{-ixy} dx \quad \text{(IPP)}$$

$$= -\frac{y}{2\varepsilon} K_\varepsilon(y)$$

D'où $\forall y \in \mathbb{R}^d$ $K_\varepsilon(y) = K_\varepsilon(0) e^{-y^2/4\varepsilon}$

$$K_\varepsilon(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon x^2} dx \underset{u=\sqrt{\varepsilon}x}{=} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}$$

donc $\forall y \in \mathbb{R}$ $K_\varepsilon(y) = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} e^{-\frac{y^2}{4\varepsilon}}$

② Cas $d \geq 2$:

Par le théorème de Fubini :

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix.y} e^{-\varepsilon \|y\|^2} dy = \prod_{j=1}^{d} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix_j y_j} e^{-\varepsilon y_j^2} dy_j = \left(\sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}\right)^d e^{-\frac{\|y\|^2}{4\varepsilon}}$$

③ Montrons la formule d'inversion

Soit $u \in S(\mathbb{R}^d)$ et $x \in \mathbb{R}^d$.

Par convergence dominée (*) : $\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix.y}\hat{u}(y)\,dy = \lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon$ où $I_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix.y}\hat{u}(y)e^{-\varepsilon\|y\|^2}dy$

$$I_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix.y}\hat{u}(y)e^{-\varepsilon\|y\|^2}dy = \iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} e^{ix.y}e^{-\varepsilon\|y\|^2}e^{-iz.y}u(z)\,dz\,dy$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} e^{ix.y}e^{-\varepsilon\|y\|^2}e^{-iz.y}u(z)\,dy\,dz$$ (par Fubini car $(z,y)\mapsto e^{ix.y}e^{-iz.y}e^{-\varepsilon\|y\|^2}u(z) \in L^1(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)$)

$$= \int_{\mathbb{R}^d} u(z)\left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-z).y}e^{-\varepsilon\|y\|^2}dy\right)dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} u(z)K_\varepsilon(z-x)\,dz = \int_{\mathbb{R}^d} u(z)\left(\sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}\right)^d e^{-\frac{\|z-x\|^2}{4\varepsilon}}dz$$

$$= \left(\sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}\right)^d (2\sqrt{\varepsilon})^d \int_{\mathbb{R}^d} u(x+2\sqrt{\varepsilon}v)e^{-\|v\|^2}dv \quad \left(v = \frac{z-x}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

$$\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \sqrt{\pi}^d\, 2^d \int_{\mathbb{R}^d} u(x)e^{-\|v\|^2}dv$$ (par convergence dominée (*) car $S(\mathbb{R}^d)\subset L^\infty(\mathbb{R}^d)$)

$$= (2\pi)^d u(x)$$

④ Si on veut démontrer le thm pour $u \in L^1$, il faut supposer $\hat{u} \in L^1$ pour (*) et changer (*) par :

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(z)K_\varepsilon(z-x)\,dz = \int_{\mathbb{R}^d} u(z)K_\varepsilon(x-z)\,dz \quad (K_\varepsilon \text{ paire})$$

$$= u * K_\varepsilon(x)$$

$$\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^1} u(x)(2\pi)^d$$ en utilisant la théorie des approximations de l'unité. Attention, ils ne sont pas à support compact. Il y a une subtilité.

On obtient une égalité presque partout en extrayant avec Riesz-Fischer.