

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et p une fonction poids. ⁽¹⁾ On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que $\int_I e^{a|x|} p(x) dx < +\infty$ ^(*)

Alors les polynômes orthogonaux associés à p forment une base hilbertienne ⁽³⁾ de $L^2(I, p)$. ⁽⁴⁾

Démonstration: Soit p telle que $(*)$. Soit $f \in L^2(I, p)$ telle que $\langle f, a^n \rangle_p = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ^(*). Montrons que $f \equiv 0$.

Soit $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
 $n \mapsto \int_I |f(x)|^2 p(x) dx$, $x \in I$
 0, sinon

$$2ab \leq a^2 + b^2$$

$$\downarrow \text{ donc } |f| \leq \frac{1}{2}(1 + |f|^2) \leq (1 + |f|^2)$$

$$\text{Alors } \int_{\mathbb{N}} |\varphi(n)| dn = \int_I |f(x)|^2 p(x) dx \leq \int_I (1 + |f(x)|^2) p(x) dx$$

Or $p \in L^1(\mathbb{N})$; $f^2 \in L^2(I, p)$. Donc la quantité de droite est finie. ⁽⁵⁾
 Donc $\varphi \in L^1(\mathbb{N})$ et on peut considérer sa transformée de Fourier:

$$\forall w \in \mathbb{N}, \quad \varphi(w) = \int_{\mathbb{N}} \varphi(n) e^{-inx} dx$$

Montrons que φ se prolonge en une fonction holomorphe sur l'ouvert $B_a = \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im}(z)| < \frac{a}{2}\}$ ⁽⁶⁾

$$\text{Prenons, } \forall n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{C}; \quad g(n, t) = \int_I |f(x)|^2 p(x) e^{-inx} dx = \int_I |f(x)|^2 p(x) e^{-in(\operatorname{Re}(t) + i\operatorname{Im}(t))} dx$$

$$\text{Pour } z \in B_a: \int_I |g(n, t)| dn \leq \int_I |f(x)|^2 p(x) e^{\frac{a}{2}|x|} dx$$

$$\leq \left(\int_I |f(x)|^2 p(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_I e^{a|x|} p(x) dx \right)^{1/2}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. ⁽⁷⁾ $< +\infty$ ^(***)

Donc on peut considérer $f: z \in B_a \mapsto \int_I g(n, t) dn$

Montrons que f vérifie les hypothèses du théorème d'holomorphicité des séries "intégrales": ⁽⁸⁾

* $z \mapsto g(x, z)$ est mesurable sur I , $\forall z \in B_a$

* $x \mapsto g(x, z)$ est holomorphe sur B_a , $\forall x \in I$

* $|g(x, z)| \leq \|f\|_1 e^{\frac{a}{2}|x|}$ $\forall z \in B_a, \forall x \in I$, or

$x \mapsto \|f\|_1 e^{\frac{a}{2}|x|} \in L^1(I)$ par ***

donc F est holomorphe sur B_a , et on peut calculer ses dérivées :

$\forall z \in B_a, \forall n \in \mathbb{N}, F^{(n)}(z) = (i)^n \int_I f(x) x^n e^{-ixz}$ plus de

donc en $0 \in B_a$: $F^{(n)}(0) = (i)^n \int_I f(x) x^n$ plus de $= 0$ par (**)

Par unicité du développement en série entière d'une fonction holomorphe, on a : $F = 0$ sur un voisinage de 0 .

Par le théorème du prolongement analytique⁽¹⁰⁾, on a : $F = 0$ sur le cône B_a , donc en particulier sur l'axe réel.

Or F et $\tilde{F}$ coïncident sur $\mathbb{R}$, donc $\tilde{F} = 0$.

Par injectivité de la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$, on en déduit que

$\tilde{F} = 0$. Or $\tilde{F} = \int f$ où $p > 0$ donc $f = 0$ presque partout

donc par le théorème de caractérisation des bases hilbertiennes⁽¹²⁾, on en

déduit que les polynômes orthogonaux associés à p forment une base hilbertienne de $L^2(I, p)$.

① p. 110 fonction poids : $p : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mes, strict pos tq

$\forall n \in \mathbb{N}, \int_I |x|^n$ plus de $< +\infty$ (*)

② p. 110 3! (fn) de poly unitaire orthogonaux 2 à 2 tq $\deg(p_n) = n$

Cette famille s'appelle la famille de poly ortho associés à la fct poids p .

Elle s'obtient par Gram-Schmidt⁽¹⁾ appliqué à $(x^n)_n$.

④ p. 110 $L^2(I, p) = \{fct \text{ de carré intégrable par la mesure de densité}$

par rapport à la mesure de Lebesgue (ie muni des PS:

$$\langle f, g \rangle_p = \int_I f(x) \overline{g(x)} dx$$

③ p. 91

est un Hilbert (esp préhilb (ie muni d'un PS) complet pour $\|\cdot\|_p$)

Par (*), tout poly $\in L^1(I, p)$ donc $\in L^2(I, p)$ ④

③ p. 107 BK: Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un Hilbert. on dit que $(e_i)_{i \in I}$ est une BK de H si elle est:

(i) orthogonale: $\langle e_i, e_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$

{ orthogonale $\Rightarrow$ libre

(ii) normée: $\langle e_i, e_i \rangle = 1 \quad \forall i \in I$

(iii) totale: $H = \overline{\text{Vect}(e_i, i \in I)}$

{ topologiquement génératrice.

Voir BK // B algébrique ④

⑤ p. 115 transformée de Fourier: $f \in L^1(\mathbb{R})$; $\forall \omega \in \mathbb{R}, \hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt$

⑥ p. 57 fonction holomorphe: une fct f se hds en $z_0 \in U$, s'il existe

une app $\mathbb{C}$ -linéaire continue g tq $\forall z \in \mathbb{C}, f(z_0 + z) = f(z_0) + g(z) + o(|z|)$

g est unique: c'est la diff de f en z_0 . Si f se hds, $Df(z_0)$ est $\mathbb{C}$ -linéaire

et on peut écrire $Df(z_0)(z) = f'(z_0)z$. Et on a: p. 46 f hds en U

$$Df(z_0)(1) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \quad ; \quad Df(z_0)(i) = \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$

$$\text{si } \forall a \in U, \frac{f(a) - f(a_0)}{z - a_0}$$

admet une limite lorsque

$z \rightarrow a$ (noter $f'(a)$ si elle existe).

ie: f hds $\Leftrightarrow f$ $\mathbb{C}$ -dérivable.

⑦ p. 93 Inégalité de Cauchy-Schwarz: $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ préhilb

Alors $\forall x, y \in H, |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$

Δ VA: sur $\mathbb{R}$ on perd de l'info sur $\mathbb{C}$ (ça pourrait pointer dans les

$\bullet |\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\| \Leftrightarrow (x, y)$ liée

$\bullet \langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \Leftrightarrow (x, y)$ portivement liée

⑧ p. 67 holomorphie forte de signe réelle: Soient (X, T, μ) mesuré; U ouvert

de $\mathbb{C}$; $f: U \times X \rightarrow \mathbb{C}$. Pour $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \int_X f(z, x) d\mu(x)$

2: * $\forall z \in U$, $x \mapsto f(z, x)$ est mesurable sur X

* $\exists N \subset X$ / $\mu(N) = 0$ / $\forall x \notin N$, $z \mapsto f(z, x)$ est l.h.d. sur U

* $\forall x \in U$ compact $\textcircled{1}$, $\exists g \in L^1(X)$ / $|f(z, x)| \leq g(x)$ $\forall x \notin N$, $z \in U$

Alors: f est l.h.d. sur U et $\forall z \in U$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(z) = \int_X \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z, x) d\mu(x)$

$\textcircled{9}$ p. 63 DSE fct l.h.d.: Soit f l.h.d. sur un disque ouvert de rayon ρ centré en a . Alors f est DSE dans le disque: $\exists \sum a_n (z-a)^n$ de rayon de $\mathcal{D} > \rho$ tq $\forall z \in \mathcal{D}(a, \rho)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$.
de plus, la série CNV sur tout compact du $\mathcal{D}$ converge

$\textcircled{10}$ p. 14 pp du prolongement anal. $\textcircled{6}$: Soit U un ouvert connexe. Si deux fonctions anal coïncident sur un ~~fon~~-ensemble $D \subset U$ ayant un pt adhérent $\textcircled{7}$, alors elles sont égales sur U .

$\textcircled{11}$ Rudin p. 225 $f \in L^1$ / $\hat{f} \equiv 0 \Rightarrow f = 0$ pp
En effet: $\hat{f} \equiv 0 \Rightarrow \hat{f} \in L^1$ donc par l'inv. d'inversion: $\hat{\hat{f}} = f(\cdot)$
Donc $f = 0$ pp.

$\textcircled{12}$ p. 105 Carac des BH: Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ $\textcircled{8}$ h.s. séparable, soit (e_n) une famille orthogonale de H . On a eq:

li) (e_n) est une BH

lii) $\forall x \in H$, $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ i.e. $\|x - \sum_{n=0}^N \langle x, e_n \rangle e_n\| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$

liii) $\forall x \in H$, $\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$ (Parseval)

liiv) $(e_n, n \in \mathbb{N})^\perp = \{0\}$

$\in \Delta$: $\begin{cases} H \rightarrow \ell^2(\mathbb{N}) \\ x \mapsto (\langle x, e_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}} \end{cases}$ est une isom. surjective $\textcircled{9}$

① Gram-Schmidt alg p. 261

Soit $(e_1 \dots e_n)$ famille libre finie de E , on veut construire une base $(u_1 \dots u_n)$ orthogonale tq $u_k \in \text{Vect}(e_1 \dots e_k)$.

* $u_1 = e_1$

* On cherche u_2 sous la forme $e_2 + \lambda_{1,2} u_1$ tel que $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$

ie $\lambda_{1,2} = - \frac{\langle u_1, e_2 \rangle}{\|u_1\|^2}$

* $u_1, \dots, u_{h-1}$ étant construits, on cherche u_h sous la forme $e_h + \lambda_{1,h} u_1 + \dots + \lambda_{h-1,h} u_{h-1}$ tq $\langle u_i, u_h \rangle = 0 \forall i \leq h-1$

ie $\lambda_{i,h} = - \frac{\langle u_i, e_h \rangle}{\|u_i\|^2}$

+ on norme.

② $(X^n)_n$ est libre - leur $p_0 = e^{-x^2}$ sur $I = \mathbb{R}$

* $p_0 = 1$ + norme

* On cherche p_1 sous la forme $X + \lambda p_0$ tq $\langle p_0, p_1 \rangle = 0$

$\langle p_0, X + \lambda p_0 \rangle = \langle p_0, X \rangle + \lambda \|p_0\|^2$

• $\langle p_0, X \rangle = \int_{\mathbb{R}} 1 \cdot x \cdot e^{-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$

• $\|p_0\|^2 = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

donc $\langle p_0, p_1 \rangle = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

donc $p_1 = X$ + norme...

③ p 91 Quelle que soit la norme, un evn de dim $< \infty$ est complet.

Un espace métrique de dim finie est donc un espace de Hilbert. On parle alors d'espace euclidien ou hermitien.

Ex: $\ell^2(\mathbb{N}) = \{ x = (x_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty \}$ muni de

$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n$ PSH est un espace de Hilbert

Ex: $L^2(X, T, \mu)$ muni de $\langle f, g \rangle = \int_X f \bar{g} d\mu$

Un sv fermé d'un espace complet est complet donc muni de la restriction du PSH, un sv fermé d'un l^2 est un l^2 .

④ p. 107 Tout esp de H admet une BH , tout sv admet une BA .

Sur une BA $(e_i)_{i \in I}$, un élément $x \in H$ se développe en une CL finie des e_i . La notion alg de base ne peut donc pas prendre en compte la nature topo de l' esp H .

Le pt (iii) de la def d'une BH introduit une notion topo par restriction à sv , on peut alors exprimer les $x \in H$ avec "mes" éléments que dans une BA .

Par ex: un tl séparable de dim ∞ admet une BA dénombrable alors qu'il n'admet pas de BH dénombrable

⑤ Rami p. 472 Un espace métrique X est dit compact si de toute suite de X on peut en extraire une ss suite convergente dans X (Bolzano-Weierstrass). ie toute suite de X possède au moins une VA .

⑥ p. 46 fonct° anal: L^1 est DSE en tout pt de $\mathcal{L}$.

⑦ Rami p. 772 $z_0 \in \mathbb{C}$ et un pt d'acc de X si $\forall r > 0, \exists z_0, r) \cap X$ contient une ss de pts

⑧ Rami p. 407 Esp séparable: s'il contient une partie dense, finie ou dénombrable.

Ex: $\mathbb{N}$ séparable car $\mathbb{Q}$ est dense et dénombrable

On dit que A est dense dans X si $\bar{A} = X$ ie le tout pt de X est

limite d'une suite de A .

Ex: $\mathbb{Q}$ est dense car tout x est limite des approx décimales de x à 10^{-n} près.

⑨ p. 105 On peut construire une BT de $\mathbb{N}$ en exhibant une suite k_j entre $\mathbb{N}$ et un autre hilb dont on connaît une base, puis en transplantant cette base dans $\mathbb{N}$ via cette itém.

Ex: p. 10, 92 Soit $\mathcal{B}\mathbb{L}^2 = \{f \in L^2(\mathbb{N}), \int_{\mathbb{N}} |f| = 0 \text{ pp sur } \mathbb{N} \setminus [-1/2, 1/2]\}$
la famille $(f_n: n \mapsto \frac{\sin(\pi(n-n))}{\pi(n-n)})_{n \in \mathbb{Z}}$ est une BL de $\mathcal{B}\mathbb{L}^2$

On la transp de façon naïve une suite k_j entre $L^2(\mathbb{Z} \setminus [-1/2, 1/2])$ et $\mathcal{B}\mathbb{L}^1$.

Ainsi, $f \in \mathcal{B}\mathbb{L}^2$ n'empêche alors (fn) de $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, f_n \rangle f_n$ (Parseval...)

⑩ Grandon era p. 419 Un env E admettant une base ^{algébrique} dénombrable n'est pas complet

Soit (e_n) une base de E . Posons $f_n = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$. Le f_n est un fermé car n est fini $< \infty$, d'ailleurs vide car il y a une boule ouverte $B(e_n, r)$ est incluse dans f_n , ($r > 0$) alors $e_n \in f_n$ donc $B(e_n, r) = B(e_n, r) - \{e_n\}$ est incluse dans f_n et f_n étant invariant par translation, $E \subset f_n$ (car)
L' E est complet, par l'lem de Baire, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ est d'intérieur vide dans E
ce qui est abs car $\bigcup f_n = E$

Théorème de Baire: (E, d) est de Baire si toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans E , est dense dans E , i.e:

$\forall (O_n)_{n \in \mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, \overline{O_n} = E \Rightarrow \overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n} = E$

ie: $\forall (F_n)_{n \in \mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, \overline{F_n} = \emptyset \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = \emptyset$

th: tout espace métrique complet est un espace de Baire.

lemme: (E, d) Baire, $(F_n)_n$ suite de fermés de E / $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = E \Rightarrow$
il existe $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n^\circ$ dense dans E .