

Caractérisation des compacts des espaces de Banach: Bonis p. 43 201-203-205-207

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. Soit $K \subset E$ une partie de E . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) K est compact ^①

(ii) K est fermé, borné et plat ^②.

Démonstration: (i) $\Rightarrow$ (ii) K est compact donc fermé et borné ^③.

Soit $\varepsilon > 0$, par précompactité de K ^④, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, $\exists x_1, \dots, x_{N_\varepsilon} \in E$ tels que:

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} B(x_i, \varepsilon)$$

Posez $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_{N_\varepsilon})$. Alors $\dim(F) \leq N_\varepsilon < +\infty$ et on a bien

$$K \subset F_\varepsilon = F + B_E(0, \varepsilon).$$

Donc K est plat.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Comme K est borné, on peut supposer que $K \subset \overline{B_E(0, 1)}$ ^⑤

Comme K est fermé dans un Banach, il est complet ^⑥. Il suffit alors de montrer que K est précompact ^⑦.

Soit $0 < \varepsilon < 1$. Comme K est plat, $\exists F$ rev de dimension finie de E tel que $K \subset F_\varepsilon = F + B_E(0, \varepsilon)$

Par le théorème de Arzela, $\overline{B_F(0, 1)}$ est compacte, donc par précompactité, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, $\exists y_1, \dots, y_{N_\varepsilon} \in F$ tq $\overline{B_F(0, 1)} \subset \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} B_F(y_i, \varepsilon)$ ^⑧

Soit $x \in K$, alors $\exists y \in F$ tq $\|x - y\| \leq \varepsilon$ $x = \frac{y_1}{1+\varepsilon} + \frac{y_2}{1+\varepsilon}$ donc $x - y_1 = \frac{y_2}{1+\varepsilon}$
donc $\|x - y_1\| = \frac{\|y_2\|}{1+\varepsilon} \leq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$
donc $\|y_2\| \leq \varepsilon + \|x\| \leq \varepsilon + 1$
 $\hookrightarrow \|x\| \leq 1$ car $K \subset \overline{B_E(0, 1)}$

Ainsi, $\frac{y}{1+\varepsilon} \in \overline{B_F(0, 1)}$. Donc $\exists i_0 \in \{1, \dots, N_\varepsilon\}$ tel que $\left\| \frac{y}{1+\varepsilon} - y_{i_0} \right\| \leq \varepsilon$

Or: $\|x - (1+\varepsilon)y_{i_0}\| \leq \|x - y\| + \|y - (1+\varepsilon)y_{i_0}\| \leq \varepsilon + (1+\varepsilon)\varepsilon \leq 3\varepsilon$

Donc $K \subset \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} B(y_i, 3\varepsilon)$ donc K est précompact

Finalement: K est compact. $\square$

Application: Soient (K, d) espace métrique compact et $\alpha \in C^0(K, \mathbb{R})$, $\|\cdot\|_\infty$. Alors

9

A est fermé, équilibré et borné $\Rightarrow A$ est compact.

Par ce qui précède, il suffit de montrer que A est plat. On va approcher A par une suite d'opérateurs de rang fini.

Par $\epsilon > 0$, notons $w(\epsilon) = \sup \{ \|f\| - \|g\| ; f \in A, d(x, y) \leq \epsilon \}$

10

Par équirétabilité uniforme de A : $w(\epsilon) \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0^+]{\forall \epsilon > 0} 0$

donc $\exists \delta > 0$ tq $\forall 0 < \epsilon \leq \delta ; w(\epsilon) \leq \epsilon$

Par précompactité de K , $\exists N_\epsilon \in \mathbb{N}^+$, $\exists x_1, \dots, x_{N_\epsilon} \in K$ tq : $K \subset \bigcup_{i=1}^{N_\epsilon} B(x_i, \delta)$

Soit alors $(\varphi_1, \dots, \varphi_{N_\epsilon}) \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R})^{N_\epsilon}$ une partition continue de l'unité subordonnée à ce recouvrement, i.e. :

i) $\forall j \in \{1, \dots, N_\epsilon\}$, $\varphi_j \geq 0$ sur K

ii) $\forall x \in K$, $\sum_{j=1}^{N_\epsilon} \varphi_j(x) = 1$

iii) $\forall x \in K$, $\forall j \in \{1, \dots, N_\epsilon\}$; a a : $x \notin B(x_j, \delta) \Rightarrow \varphi_j(x) = 0$

Posons, $\forall f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$, $L(f) = \sum_{j=1}^{N_\epsilon} f(x_j) \varphi_j$

Alors L est linéaire et par ii), L est continue

12

Soient $f \in A$, $x \in K$. a a :

$$\begin{aligned}
\|f\|(x) - L(f)(x) &\leq \sum_{j=1}^{N_\epsilon} \|f\|(x) - f(x_j) \varphi_j(x) \text{ par i)} \\
&\leq w(\delta) \sum_{j=1}^{N_\epsilon} \varphi_j(x) \text{ par iii)} \\
&\leq w(\delta) \text{ par ii)} \leq \epsilon
\end{aligned}$$

Ainsi : $\|f - L(f)\|_\infty \leq \epsilon$ donc $A \subset \overline{\text{Im}(L)} + B(0, \epsilon)$

or $\text{rg}(L) \leq N_\epsilon < +\infty$, alors A est plat. EV

Enfinement, A est compact

① (voir p. 27) (E, d) métrique est dit compact si du tout recouvrement de E par des ouverts de E , on peut en extraire un sous-recouvrement fini.

i.e. : si $E = \bigcup_{i \in I} O_i$ avec O_i ouverts ; $\exists J \subset I$ fini tq $E = \bigcup_{i \in J} O_i$

② Espace plat : Soit (E, u, u) un Barach, soit $k \in E$. On dit que k est plat lorsque $\forall \varepsilon > 0$, $\exists F$ sur de E de dim $< \infty$ tq $k \in F_\varepsilon = F + B_E(0, \varepsilon)$.

③⑥ Gordon p. 27 Couvert $\Rightarrow$ borné

E couvert ; $x_0 \in E$ ni on extrait un sous recouvrement fini de $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} B(x_0, n)$ on voit que E est borné.

Ranis p. 434 X compact, $A \subset X$

1) A compact $\Rightarrow A$ fermé

2) X compact, A fermé $\Rightarrow A$ compact

En effet :

a) Tout espace métrique compact est complet p. 433

et b) A complet $\Rightarrow A$ fermé p. 425

En effet : a) Soit $(u_n)_n$ de Cauchy. $\exists (u_n)_n$ CV.

Par compacité de X , $(u_n)_n$ possède une s.a. l donc CV p. 423 c)

donc X est complet

b) Soit A compact, soit $x \in \overline{A}$; $\exists (u_n)_n \in A^{\mathbb{N}} \mid u_n \rightarrow x$

$(u_n)_n$ est de Cauchy dans X donc dans A , comme A est complet ;

$x \in A$ par unicité de la limite. Donc $A = \overline{A}$.

c) Soit l s.a. de $(u_n)_n$ de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$ alors $\exists N \mid \forall n, p \geq N, d(u_n, u_p) \leq \varepsilon$

$\forall n, p \geq N$. Comme l est s.a. de $(u_n)_n$, $\exists m \geq N \mid d(u_m, l) \leq \varepsilon$.

$\forall n \geq N, d(u_n, l) \leq d(u_n, u_m) + d(u_m, l) \leq 2\varepsilon$. Donc $u_n \rightarrow l$ $\square$

2) Si X compact, A fermée, soit $(u_n)_n$ de Cauchy. Alors $(u_n)_n$ de Cauchy dans X . Comme X est complet, on $\rightarrow l \in X$

l est limite d'une suite de A donc $l \in \overline{A} = A$ donc on $\rightarrow l \in A$

Donc A est complet $\square$

④ Gordon p. 29 E est dit précompact si $\forall \varepsilon > 0, \exists$ un recouvrement fini de E par des boules ouvertes de rayon ε .

⑤ Peut-être à faire relier à K une boule ouverte de rayon $\frac{1}{n}$ à $n > 0$ désigne le rayon de la boule de centre 0 contenant K .

Les lemmes sont des lemmes concernant la structure d'esp.

⑦ Un e.m. (X, d) est compact si il est complet et précompact.

⑧ Leavis p. 441 Soit un e.m. de dim. $< \infty$, les boules fermées sont compactes. Une partie de $E \subset (\dim(E) < \infty)$ est compacte si elle est fermée bornée.

⑨ 20 p. 149 $A \subset \mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$ est équicontinue si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x, y \in X, \forall f \in A, d(x, y) \leq \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$$

⑩ p. 293 Soit (K, d) un e.m. compact recouvert par une famille d'ouverts non vides $(O_j)_{j \in \{1, \dots, N\}}$. Alors $\exists \varphi_1, \dots, \varphi_N \in \mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$ tq :

i) $\forall j \in \{1, \dots, N\}, \varphi_j \geq 0$ sur K à vals dans $[0, 1]$.

$$\text{ii) } \forall x \in K, \sum_{j=1}^N \varphi_j(x) = 1$$

$$\text{iii) } \forall j \in \{1, \dots, N\}, \forall x \in K \setminus O_j, \varphi_j(x) = 0.$$

$$\text{En effet : } \forall j \in \{1, \dots, N\}, \forall x \in K, \text{ on pose } \varphi_j(x) = \frac{d(x, K \setminus O_j)}{\sum_{i=1}^N d(x, K \setminus O_i)}$$

$\forall x \in K, \forall j \in \{1, \dots, N\}, O_i$ recouvre K donc $\exists O_{i_0} \mid x \in O_{i_0}$
donc $d(x, K \setminus O_{i_0}) = d(x, K \cap O_{i_0}^c) > 0$

Par construction, φ_j vérifie i), ii), iii)

Not φ_j est $\mathcal{C}^\infty$ sur $d(\cdot, A)$ est $\mathcal{C}^\infty$.

Soit $j \in \{1, \dots, N\}$ sur $d(\cdot, K \setminus O_j)$ est 1-lips

$$\text{Soient } x, y \in K, \forall z \in K \setminus O_j, \text{ par IT : } d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Donc $d(x, K \cup \{y\}) - d(x, y) \leq d(y, y) = 0$

Donc $d(x, K \cup \{y\}) \leq d(x, y)$

Or la borne inf est le + gd des valeurs : $d(x, K \cup \{y\}) - d(y, K \cup \{y\}) \leq d(x, y)$

Pour tout les points de x et y : $d(\cdot, K \cup \{y\})$ est 1-lips $\Rightarrow$

$$(12) \|L(f)\| = \left\| \sum_{i=1}^{N_f} f(x_i) \varphi_i \right\| \leq \|f\|_{\infty} \left\| \sum_{i=1}^{N_f} \varphi_i \right\| \leq \|f\|_{\infty}$$

Donc $L \in C^0$.

$$\text{Et } \frac{\|L(f)\|}{\|f\|_{\infty}} \leq 1 \text{ donc } \|L\| \leq 1.$$