Trigonalisation simultanée : Gourdon p. 181 151 - 154 - 157 - 159

Soit E un $\mathbb{K}$ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes commutant 2 à 2.

Alors les f_i sont trigonalisables dans une même base.

Lemme 1 : Il existe un vecteur propre commun à tous les f_i.

Démonstration : Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

* $n = 1$ OK

* Supposons le résultat vrai jusqu'à un rang $n-1 \geq 1$.

a) Si tous les f_i sont des homothétie : soit $i \in I$; $\exists \lambda_i \in \mathbb{K}$ / $\forall x \in \mathbb{K}^n$, $f_i(x) = \lambda_i x$; soit $j \neq i$, $f_j \circ f_i(x) = f_j(\lambda_i x) = \lambda_j(\lambda_i x)$

donc $\lambda_i x$ est un vecteur propre de f_j et $f_i(\lambda_i x) = \lambda_i(\lambda_i x)$ donc $\lambda_i x$ est aussi un vecteur propre de f_i. Ceci $\forall j \neq i$

b) Si $\exists f \in (f_i)_{i \in I}$ / f n'est pas une homothétie. Comme f est trigonalisable alors f admet une valeur propre λ donc un sous-espace propre E_λ de $\dim(E_\lambda) < n$ (car f n'est pas une homothétie) qui est de plus stable par les f_i. Par hypothèse de récurrence, il existe un vecteur propre commun à tous les $f_i|_{E_\lambda}$ qui est donc un vecteur propre commun à tous les f_i. ∎

Lemme 2 : Si E est un $\mathbb{K}$ev de dimension finie alors pour tout $F \subset E$ sev, $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim E$.

Démonstration : Soit $r = \dim(F)$, soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de F, qui on complète en une base $(e_1 \dots e_n)$ de E

Alors $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r)$ donc $F^\perp = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r)^\perp$ (1)

Soit $\varphi \in E^*$ / $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*$ $= \lambda_i$

$\varphi \in F^\perp \iff \forall i \in [\![1 \dots r]\!]$, $\varphi(u_i) = 0$

Ainsi : $\varphi \in F^\perp \iff \varphi \in \mathrm{Vect}(e_{r+1}^*, \dots, e_n^*)$.

Conséquence : si F est un sev de E de dimension r, il existe alors $n-r$ formes linéaires linéairement indépendantes $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-r}$ / $F = \{x \in E \mid \forall i \in \{1 .. n-r\},\ \varphi_i(x) = 0\} = \bigcap_{i=1}^{n-r} \mathrm{Ker}(\varphi_i)$ (2)

Lemme 3 : Soit E un $\mathbb{K}$ev de dimension finie. Un sev F de E est u-stable ssi $F^\perp$ est ${}^t u$-stable

Démonstration : $\Rightarrow$ $u(F) \subset F$ donc $\forall \varphi \in F^\perp$. comme $\varphi(F) = \{0\}$ alors $\varphi \circ u(F) = \{0\}$ donc ${}^t u(\varphi)(F) = \{0\}$ donc ${}^t u(\varphi) \in F^\perp$

$\Leftarrow$ Par le lemme 2 ; $\exists n-r$ forme linéaires $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-r}$ telles que $F = \bigcap_{i=1}^{n-r} \mathrm{Ker}(\varphi_i)$. En particulier $\forall i$; $F \subset \mathrm{Ker}(\varphi_i)$ ie $\varphi_i \in F^\perp$

Comme ${}^t u(F^\perp) \subset F^\perp$ alors ${}^t u(\varphi_i) = \varphi_i \circ u \in F^\perp$ $\forall i$ donc $\varphi_i \circ u(F) = \{0\}$. Donc $\forall i$, $u(F) \subset \mathrm{Ker}(\varphi_i) \subset \bigcap \mathrm{Ker}(\varphi_i) = F$ ∎

Démonstration : Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$

* $n = 1$: OK
* Supposons le résultat vrai jusqu'à un rang $n-1 \geq 1$

On applique le résultat précédent à $({}^t f_i)_i$ qui commutent 2 à 2 et sont trigonalisables (car $\chi_{{}^t f_i} = \chi_{f_i}$). Soit alors $a \in E^*$ un vecteur propre commun à tous les ${}^t f_i$; $H = (\mathbb{K}a)^\perp$ est donc un hyperplan de E stable par tous les f_i.

Par hypothèse de récurrence, il existe une base B de H trigonalisant tous les $f_i|_H$.

Soit $e \in E$ / $B' = (B, e)$ est une base de E

Alors $\forall i \in I$, $\mathrm{Mat}_{B'}(f_i) = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} * & & \\ & \ddots & \\ (0) & & * \end{matrix} & \begin{matrix} * \\ \vdots \\ * \end{matrix} \\ \hline 0 \ \cdots \ 0 & * \end{array}\right]$

Finalement : B' trigonalise tous les f_i.

① Ramis p. $A \subset \mathrm{Vect}(A)$ donc $\mathrm{Vect}(A)^\perp \subset A^\perp$

Si $f \in A^\perp$; $\forall x \in \mathrm{Vect}(A)$; $x = \sum \lambda_i a_i$

Donc $f(x) = \sum \lambda_i f(a_i) = 0$ donc $f \in \mathrm{Vect}(A)^\perp$

② Ramis p. 118 Si $\dim(F) = r$; alors F est l'intersection d'une famille libre $(H_1, \dots, H_{n-r})$ d'hyperplans de E

Si $f_i(x) = 0$ est l'équation définissant H_i ; $f_i \in E^*$; alors

$$F = \bigcap_{i=1}^{n-r} H_i = \bigcap_{i=1}^{n-r} \{x \mid f_i(x) = 0\} = \bigcap_{i=1}^{n-r} \ker(f_i)$$

Benjamin : F $\dim(F) = q = n-r$; $\exists (e_1, \dots, e_q)$ BON de F

qu'on complète en $(e_1, \dots, e_q, \underbrace{e_{q+1}, \dots, e_n}_{r})$ BON de E.

On note $H_i = \mathrm{Vect}(e_{q+i})^\perp$

$= \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{q+i-1}, e_{q+i+1}, \dots, e_n)$

Soit $x \in F$ alors $x = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i e_i$

$$\langle x, e_{q+i} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{q} \lambda_i e_i, e_{q+i} \right\rangle = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \langle e_i, e_{q+i} \rangle = 0$$

Donc $x \in \cap H_i$

Soit $x \in \cap H_i$; alors $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$

$\langle x, e_{q+i} \rangle = 0$ donc $x = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i e_i$.