

Décomposition polar: $NH262 \geq \begin{cases} .348 \\ .259 \end{cases}$ $150 - 155$

Sturm p. 127

$\forall \Omega \in \mathcal{O}(n)$, $\exists O \in \mathcal{O}(n)$, $\exists S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ / $\Omega = OS$

De plus, si $\Omega \in \mathcal{O}(n)$, cette décomposition est unique

Démonstration: •) Soit $\Omega \in \mathcal{O}(n)$. Considérons l'action par

congruence: $\mathcal{O}(n) \times \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (1)
 $(B, A) \mapsto B^t A B$

$G \times X \rightarrow X$: $a \in X$, action
 $\text{orb}(a) = \{g \cdot a, g \in G\} \subset G$

Alors $\text{orb}(I_n) = \{B^t B, B \in \mathcal{O}(n)\} \stackrel{(*)}{=} \{S \in \mathcal{O}(n) / {}^t S = S \text{ et}$

$\text{tr} S > 0\} (= \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}))$ Montrons l'égalité (*):

(1) ${}^t (B^t B) x = {}^t ({}^t B x) {}^t B x$ est une somme de carrés donc est positif et est nul si et seulement si ${}^t B x = 0$ i.e. $x = 0$ car $B \in \mathcal{O}(n)$.

(2) Par le théorème d'inertie de Sylvester, chaque orbita

contient une matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_p & & \\ & I_q & \\ & & 0 \end{pmatrix} = I_{p,q}$

i.e. $\forall S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\exists P \in \mathcal{O}(n)$ / $S = P I_{p,q} {}^t P$ or $\text{tr} S \in \mathbb{N}$ / ok, $\text{tr} S > 0$

donc ${}^t x P I_{p,q} {}^t P x > 0$ i.e. ${}^t ({}^t P x) I_{p,q} {}^t P x > 0$ donc les km diagonaux de

$I_{p,q}$ sont strictement positifs. Donc $I_{p,q} = I_n$, ainsi S est congruente à I_n .

Par le théorème spectral,

donc $\forall \Omega \in \mathcal{O}(n)$, ${}^t \Omega \Omega \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On peut diagonaliser ${}^t \Omega \Omega$

dans une base orthogonale: ${}^t \Omega \Omega = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} {}^t P$ où $\lambda_i > 0$

On peut alors $S = P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} {}^t P \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$

On a: $S^2 = {}^t \Omega \Omega$ et si on pose $O = \Omega S^{-1}$ alors:

${}^t O O = {}^t (\Omega S^{-1}) \Omega S^{-1} = S^{-1} {}^t \Omega \Omega S^{-1} = S^{-1} S^2 S^{-1} = I_n$

Ainsi: $\Omega = OS$ où $O \in \mathcal{O}(n)$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$

Unicité: On suppose que $\Omega = OS = O'S'$ avec $O' \in \mathcal{O}(n)$, $S' \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$

$$\text{Alors } S^2 = \tau \tau^{-1} = \tau (\tau^{-1}) = \tau (S^{-1}) O^{-1} S^{-1} = \tau S^{-1} \tau^{-1} O^{-1} S^{-1} = S'^2$$

Soit Q le polynôme interpolateur de Lagrange tel que $Q(b_i) = \sqrt{a_i}$

$$\text{Alors } S = P \begin{pmatrix} \sqrt{a_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{a_n} \end{pmatrix} P^{-1} = P Q \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= Q \left(P \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \right) = Q(S^2) = Q(S'^2)$$

Or S' commute avec S'^2 donc avec $Q(S'^2) = S$. De plus, S et S' sont diagonalisables ; donc sont diagonalisables dans une base

commune : $\exists P_0 \in GL(n) / \begin{cases} S' = P_0 \text{diag}(\mu_i') P_0^{-1} \\ S = P_0 \text{diag}(\mu_i) P_0^{-1} \end{cases}$

$$\text{Et } S'^2 = S^2 \Rightarrow \forall i, \mu_i'^2 = \mu_i^2 \Rightarrow \forall i, \mu_i' = \mu_i \text{ (on dit tout) } \Rightarrow S' = S$$

Par suite : $O = O'$ d'où l'unicité du couple.

•) Cas où $\pi \in GL(n) \setminus GL(n)$.

Par densité de $GL(n)$ dans $GL(n)$, $\exists (\pi_k)_k \subset GL(n)^n$ telle que $\pi_k \rightarrow \pi$.

$$\text{Or } \forall k, \exists g_k \in GL^+(n), \exists O_k \in O(n) / \pi_k = O_k g_k$$

Or $O(n)$ est compact donc quitte à extraire une sous-suite de $(O_k)_k$, on peut supposer que $O_k \rightarrow O \in O(n)$ (compact = fermé)

$$\text{Alors } g_k = O_k^{-1} \pi_k \rightarrow O^{-1} \pi \in GL^+(n) \text{ (car } GL^+(n) \text{ est fermé) et que}$$

$$A \mapsto A^{-1} B \text{ est continue.}$$

$$\text{On pose } S = O^{-1} \pi \text{ et donc } \pi = OS$$

On perd l'unicité. En effet par $\pi = O_{GL(n)}$; toute matrice

$$O \in O(n) \text{ commute avec } S = O_{GL(n)}$$

Le p 250 on dit que $A, A' \in GL(K)$ sont congruents si elle apprt à la même orbite pour l'action de congruence $\Leftrightarrow$ ils sont les not d'une

un $\mathbb{R}$ dans des bases $\neq$

② Remis p. 148 Soit E un $\mathbb{R}$ de dim $n > 0$, soit $\phi \in \mathcal{Q}(E)$ de signature (p, q) . Alors $\exists B$ une base de E / $\text{Mat}_B(\phi) = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$ si ϕ est def pos, alors $p=n$ et B est ϕ -orthonormée.

Démonstration: Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs ϕ -conjugués.

on note $n = \sum \alpha_i e_i \in E$. Alors $\text{Mat}_B(\phi) = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ①

où $\alpha_1, \dots, \alpha_p > 0$, $\alpha_{p+1}, \dots, \alpha_{p+q} < 0$ et $\alpha_{p+q+1} = \dots = \alpha_n = 0$

$$\begin{aligned} \phi(n) &= {}^t x \text{Mat}_B(\phi) x = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2 = \sum_{i=1}^p \alpha_i x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} (-\alpha_i) x_i^2 \end{aligned}$$

on pose $\beta_i = \begin{cases} \alpha_i, & i \in \{1, \dots, p\} \\ -\alpha_i, & i \in \{p+1, \dots, p+q\} \\ 0, & i \in \{p+q+1, \dots, n\} \end{cases}$ et $e_i = \beta_i e_i$

Alors $a = \sum \beta_i e_i$ et $\phi(n) = \sum_{i=1}^p \beta_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} \beta_i^2$

③ Soit E un $\mathbb{R}$ de dim $n > 0$, soit ϕ une $\mathbb{R}$ de signature (p, q) . Alors pour toute base B de E de vecteurs 2 à 2 ϕ -conjugués, $\text{Mat}_B(\phi) = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est tq $\alpha_1, \dots, \alpha_p > 0$, $\alpha_{p+1}, \dots, \alpha_{p+q} < 0$ et $\alpha_{p+q+1} = \dots = \alpha_n = 0$ (évident à proprement parler).

④ $Q(x) = \sum_{i=1}^r \beta_i \prod_{\substack{1 \leq j \leq r \\ j \neq i}} \frac{x - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$

⑤ Soit p 166 Soit $\Gamma = \{ \gamma_1, \dots, \gamma_r \} = \mathcal{S}(\gamma)$; $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ les n arcs γ_i , γ_i est stable par γ .

Soit $x \in E$: $\ker(f - \lambda_i \text{id})$; $f(x) - \lambda_i x = 0$

$$(f - \lambda_i \text{id})(g(x)) = f(g(x)) - \lambda_i g(x) = g(f(x)) - \lambda_i g(x) \\ = g(\underbrace{f(x) - \lambda_i x}_{=0}) = 0$$

donc $g|_{E_{\lambda_i}}$ induit un endo de E_{λ_i} qui est diagonalisable

(f diago, $\forall C \in \text{Mat}(E)$ par $f \Rightarrow f|_F$ diago)

Il existe donc une base B_i de E_{λ_i} qui diagonalise $g|_{E_{\lambda_i}}$; elle diagonalise $f|_{E_{\lambda_i}}$ car $f|_{E_{\lambda_i}} = \lambda_i \text{id}|_{E_{\lambda_i}}$

Or $E = \bigoplus E_{\lambda_i}$ donc $B = (B_1, \dots, B_r)$ est une base de diag commune de f et g .

⑥ Carnet de voyage p. 115 Soit $A \in \text{M}(K) \setminus \text{GL}(K)$

Alors $0 \in \text{Sp}(A)$

$\text{Sp}(A) \setminus \{0\}$ est fini ou vide

* si $\text{Sp}(A) \setminus \{0\} \neq \emptyset$, il possède un élément minimal non nul α et donc $\forall \lambda \in \text{Sp}(A) \setminus \{0\}$, $0 < |\lambda| < \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \lambda \notin \text{Sp}(A)$

* si $\text{Sp}(A) \setminus \{0\} = \emptyset$ alors $0 < |\lambda| < \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \lambda \notin \text{Sp}(A)$

Donc $(A - \frac{1}{n} \text{Id})_{n \geq 1} \in \text{GL}(K)^{\mathbb{N}}$ ($\frac{1}{n} < \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \frac{1}{n} \notin \text{Sp}(A)$)

Et $A - \frac{1}{n} \text{Id} \rightarrow A$.

⑦ p. 119 $\text{GL}(n) \subset \{n \times n \text{ mat} / \text{norm}_2 = 1\}$ donc est borné

Soit $f: \text{GL}(n) \rightarrow \text{GL}(n)$ alors $f^{-1}(\{1\}) = \{n \times n \text{ mat} / \text{tr} = 1\} = \text{GL}(n)$

Donc est fermé

⑧ Soit $(S_n)_n$ une suite de $\mathbb{R}^n_+$ qui converge vers $S \in \text{GL}(n)$

Alors $\forall \epsilon, \exists n = n(\epsilon)$ et $\forall n \geq n(\epsilon)$, $\epsilon S_n \geq 0$

Par passage à la limite: $S = {}^t S$ et ${}^t x S x \geq 0$ donc $S_n^+(u)$ est fermé

③ cours p. 196 Théorème spectral pour le endomorphisme symétrique d'un espace euclidien.

Soit E un es euclidien de dim $n > 0$. Tout endo sym de E est diagonalisable et les E_λ sont 2 à 2 orthogonaux: $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$

démonstration: 1) Nq X_u est surdi

Soit B une BOB de E ; soit $A = \text{Mat}_B(u) \in \text{Sn}(n)$

• si $n, n' \in \text{dh}(\mathbb{C})$, $\overline{nn'} = \overline{n} \overline{n'}$, $\overline{({}^t n)} = {}^t \overline{n}$

• si $x \in \mathbb{C}^n$, de matrice X (coordonnées de x dans la BOB de E)

on a: ${}^t x \overline{x} = \sum |x_i|^2 = 0$ si $x = 0$

On considère $A \in \text{Sn}(n)$ comme $A \in \text{dh}(\mathbb{C})$. Soient $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$

et $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ $AX = \lambda X$

Alors ${}^t \overline{x} A X = {}^t \overline{x} \lambda X = \lambda {}^t \overline{x} X$

Comme $A = \overline{A}$, alors $\overline{AX} = \overline{\lambda X} \Rightarrow A \overline{x} = \overline{\lambda} \overline{x}$ et

$\overline{{}^t \overline{x} A X} = {}^t x A \overline{x} = {}^t x \overline{\lambda X} = \overline{\lambda} {}^t x \overline{x}$

Comme $A = {}^t A$, ${}^t x A \overline{x} = {}^t x {}^t A \overline{x} = {}^t (AX) \overline{x} = {}^t (\lambda x) \overline{x} = \lambda {}^t x \overline{x}$

donc $\overline{\lambda} {}^t x \overline{x} = \lambda {}^t x \overline{x}$ donc $\lambda = \overline{\lambda}$ donc $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}$

2) Montrons que les E_λ sont 2 à 2 $\perp$.

Soient $\lambda \neq \mu \in \text{Sp}(u)$, nq $E_\lambda(u) \perp E_\mu(u)$

Soient $x \in E_\lambda(u)$, $y \in E_\mu(u)$, $u(x) = \lambda x$; $u(y) = \mu y$

$(u(x)|y) = (\lambda x|y) \Rightarrow \lambda(x|y) = \mu(x|y) \Rightarrow (x|y) = 0$

3) Soit $F = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$; $F \subset E$ et u n'est pas

On bien $F^\perp = \{0\}$ ou bien $F^\perp \neq \{0\}$
 $\downarrow$
 fini

Si $F^\perp \neq \{0\}$ alors F u -stable $\Rightarrow F^\perp$ u -stable

donc $u|_{F^\perp} \in \mathcal{L}(F^\perp)$ et rgm donc admet un sp de $\dim \geq 1$
(par 1) qui est ^{aussi} un sp de u donc $F \cap F^\perp \neq \emptyset$ (c'est)

donc $F^\perp = \{0\}$ donc $F = \bigoplus_{\lambda \in \text{sp}(u)} E_\lambda$ ~~$\mathbb{R}$~~