

Soit $A \in \text{GL}(C)$. On note $S(A)$ sa classe de similitude. Alors:

1) $A \in \text{GL}(C) \Rightarrow \overline{S(A)} \subset \text{GL}(C)$

2) A est diagonalisable $\Leftrightarrow S(A)$ est fermé.

3) A est nilpotente $\Leftrightarrow 0 \in \overline{S(A)}$

② " $\{B \in \text{GL}(C) \mid \exists P \in \text{GL}(C) / B = PAP^{-1}\}$

$B = PAP^{-1}$.

Démonstration:

1) $\Rightarrow$ Soit $A \in \text{GL}(C)$, soit $(A_p)_{p \geq 0} \in S(A)^{\mathbb{N}} \mid A_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} B \in \text{GL}(C)$

Alors $\det(A_p) = \det(A) \forall p \in \mathbb{N}$ ③

Comme $\det$ est continue ④ alors $\det(B) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \det(A_p) = \det(A) \neq 0$

Donc $B \in \text{GL}(C)$.

2) $\Rightarrow$ On suppose que A est diagonalisable. Soit $(A_p)_{p \geq 0} \in S(A)^{\mathbb{N}} \mid$

$A_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} B \in \text{GL}(C)$. Comme $A_p \in S(A)$, alors $\chi_{A_p} = \chi_A$ ⑤

Par continuité de $\chi_A \mapsto \chi_B$ de $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ ~~des coefficients du polynôme caractéristique~~; on a:

$\chi_B = \lim_{p \rightarrow +\infty} \chi_{A_p} = \chi_A$.

de plus, μ_A est à racine simple car A est diagonalisable. ⑥

Comme $A_p \in S(A)$, alors $\mu_{A_p} = 0 \forall p$. Par passage à la limite:

$\mu_A(B) = 0$. Donc B possède un polynôme annulateur scindé à racine simple.

Donc B est diagonalisable. ⑦

A et B sont diagonalisables de même polynôme caractéristique, donc elles sont semblables. ⑧ Donc $B \in S(A)$ donc $S(A)$ est fermé.

⑨ Soit $A = (a_{ij})_{i,j} \in \text{GL}(C) \mid S(A)$ soit fermé. On peut représenter A triangulaire supérieure. Notons $B = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle $A = \text{Mat}_B(A)$. $\forall p \in \mathbb{N}^*$, on note

$A_p = \text{Mat}_B(A_p)$ où $B_p = \left(\frac{1}{p} e_1, \dots, \frac{1}{p^n} e_n \right)$

Alors $k \in 1, \dots, n$, $u\left(\frac{1}{p^j} e_j\right) = \frac{1}{p^j} u(e_j) = \frac{1}{p^j} \sum_{i=1}^j a_{ij} e_i = \sum_{i=1}^j p^{i-j} a_{ij} \frac{e_i}{p^i}$

donc le coefficient (i,j) de A_p est égal à $p^{i-j} a_{ij}$ si $i \leq j$ et est nul sinon.

donc A_p est triangulaire reprenant de même diagonale que A . Tous

les coefficients strictement au dessus de la diagonale sont divisés par une

puissance de p donc $A_p \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn}) = D$

or $A_p \in S(A)$ $\forall p$ car représente le même endomorphisme que A dans une

base différente. Comme $S(A)$ est fermé, on en déduit que $D \in S(A)$.

donc A est diagonalisable

3) en la well Soit $(A_p)_p \in S(A)^{\mathbb{N}} \mid A_p \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} 0$. Comme χ_A est une fonction un polynôme continue de la matrice A , alors $\chi_{A_p} \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} \chi_0 = \chi^A$ dans $\mathbb{C}[X]$.
or $(\chi_{A_p})_p$ est constante égale à χ_A .

donc $\chi_A = \chi^A$. Par le théorème de Cayley-Hamilton: $A^A = 0$ ie A est nilpotent.

$\Rightarrow$ Supposons que A est nilpotent - A est la matrice d'un endomorphisme φ dans une certaine base. Il existe $(e_1, \dots, e_n)$ une base dans laquelle $\text{Mat}_B(\varphi)$ soit triangulaire reprenant à diagonale nulle.

On considère à nouveau $B_p = \left(\frac{1}{p} e_1, \dots, \frac{1}{p^n} e_n\right)$

on a : $u\left(\frac{e_j}{p^j}\right) = \sum_{i=1}^{j-1} p^{i-j} a_{ij} \frac{e_i}{p^i}$

en notant $A_p = \text{Mat}_{B_p}(u)$, alors $A_p \in S(A)$ et $A_p \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} 0$

donc $0 \in S(A)$ $\square$

la première implication de 1) reste vraie dans $\mathbb{K}$: la classe de similitude d'une matrice diagonalisable est fermée. En revanche, la

reciproque est fautive : si $A \in \text{Mn}(\mathbb{K})$, $\{P^{-1}AP, P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})\} \cap \text{Mn}(\mathbb{K})$
 $= \{P^{-1}AP, P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})\}$

on 2 matrices nulle semblables sur $\mathbb{C}$ le sont sur $\mathbb{R}$. (1)

ex: $S(A)_\mathbb{R} = S(A)_\mathbb{C} \cap \text{Mh}(\mathbb{R})$ ex: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ann: A diagonal sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R} \Rightarrow S(A)_\mathbb{R}$ est finie.

Pq: Une base de $\mathbb{R}^n$ se peut se évaluer on la trace et constante sur une base de $\mathbb{R}^n$ qui est incluse dans un hyperplan affine de $\text{Mh}(\mathbb{C})$

① Fraumou p. 175 Soient $N, N' \in \text{Mh}(\mathbb{R})$ semblables dans $\text{Mh}(\mathbb{C})$.

$$\exists P \in \text{GL}(\mathbb{C}) / N' = P^{-1}NP \Leftrightarrow NP = PN$$

$$P = Q + iR \text{ avec } Q, R \in \text{Mh}(\mathbb{R}).$$

Alors $(Q+iR)N = N(Q+iR)$ par identification de parties réelles et imaginaires.

$$QN = NQ \text{ et } RN = NR$$

Si Q ou $R \in \text{GL}(\mathbb{R})$ OK

Ainsi: soient $\lambda \in \mathbb{C}$, $P_\lambda = Q + \lambda R \in \text{Mh}(\mathbb{C})$

$\lambda \mapsto \det(P_\lambda)$ est poly en $\lambda \not\equiv 0$ car elle vaut $\det(P) \neq 0$ en i

donc $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R} / \det(P_{\lambda_0}) \neq 0$. Comme $P_{\lambda_0}N = NP_{\lambda_0}$ et $P_{\lambda_0} \in \text{GL}(\mathbb{C})$

N et N' sont bien semblables dans $\mathbb{R}$.

$$\textcircled{2} S(A)_\mathbb{R} = \{ P^{-1}AP, P \in \text{GL}(\mathbb{R}) \}$$

$$\textcircled{3} \det(AP) = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}) \det(A) \det(P) = \det(P)^{-1} \det(A) \det(P) = \det(A)$$

$$\textcircled{4} \det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i), i} \quad \text{Bach p. 171 par ex}$$

$$\textcircled{5} \chi_{AP} = \det(X_{\mathbb{R}^n} - AP) = \det(X_{\mathbb{R}^n} - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}X_{\mathbb{R}^n}P - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(X_{\mathbb{R}^n} - A)P) = \det(X_{\mathbb{R}^n} - A) = \chi_A$$

⑥ ⑦ Roubaldi p. 764 théorème: les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) u est diagonalisable

$$(ii) E = \sum_{i=1}^p K_n(u - \lambda_i \text{id})$$

$$(iii) \sum_{h=1}^p \dim(K_n(u - \lambda_h \text{id})) = n$$

(iv) χ_n est scindé sur K de racines $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in K$ et chaque λ_h est de multiplicité $\dim(K_n(u - \lambda_h \text{id}))$

(v) il existe un polynôme annulateur de n scindé à racines simples dans K

(vi) μ_n est scindé à racines simples dans K .

$$\textcircled{8} \left. \begin{array}{l} A, B \text{ diag} \\ \chi_A = \chi_B \end{array} \right\} \Rightarrow \exists P_1, P_2 \in GL(\mathbb{C}), \exists D \text{ diag} \quad \begin{array}{l} A = P_1^{-1} D P_1 \\ B = P_2^{-1} D P_2 \end{array}$$

$$A = P_1^{-1} D P_1 \Leftrightarrow D = P_1 A P_1^{-1} \Rightarrow B = P_2^{-1} \underbrace{P_1 A P_1^{-1}}_{\overbrace{(P_1^{-1} P_2)^{-1}}^{Q_1}} P_2 = Q_1^{-1} A Q_1$$

⑨. Roubaldi p. 689 Théorème de Cayley-Hamilton $\chi_n(u) = 0$.

∇ . $A \mapsto \mu_A(x)$ n'est pas continue.

Supposons par l'absurde que c'est le cas.

Comme $\mathcal{D}'(\mathbb{C}) = \{ \Omega \in \mathcal{D}(\mathbb{C}) \mid \Omega \text{ admet un VP } \neq \emptyset \text{ et dense dans } \mathcal{D}(\mathbb{C}) \}$,

$$I_n = \lim_{h \rightarrow 0} A_h \text{ où } (A_h) \in \mathcal{D}'(\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$$

Par ch² de π_A : $\pi_{I_n} = \lim_{h \rightarrow 0} \pi_{A_h}$. Or $\forall \Omega \in \mathcal{D}'(\mathbb{C})$, $\pi_\Omega = \chi_\Omega$

Donc par ch² de $A \mapsto \chi_A$: $(X-1) = \pi_{I_n} = \lim_{h \rightarrow 0} \pi_{A_h} = \lim_{h \rightarrow 0} \chi_{A_h} = \chi_{I_n} = (X-1)^n$

SAUT si $n > 1$. $\square$

$$\text{d'autre: } A_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{t \rightarrow 0} I_2$$

$$\pi_{A_t} = (X-1)^2 \quad \pi_{I_2} = X-1$$

$$\pi_{A_t} \not\rightarrow \pi_{I_2}$$

⑩ μ_A est un polynôme

$$\mu_A = \sum a_n x^n$$

$$\begin{aligned} \mu_A(A) &= \mu_A(P^{-1}AP) \text{ car } A \notin \text{SA} \\ &= \sum a_n (P^{-1}AP)^n = \sum a_n P^{-1}A^n P \\ &= P^{-1} \mu_A(A) P = 0 \text{ par C-H.} \end{aligned}$$