Lemme de Morse (2) Rouvière p. 344 - 201 151-158-170-171-214-215.

12.34

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ C^3 sur $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert contenant $0_{\mathbb{R}^n}$. On suppose que :

(i) $Df(0) = 0$ (ii) $D^2f(0)$ est non dégénérée de signature $(p, n-p)$. (1)

Alors $\exists u : V \to W$ difféomorphisme C^1 entre 2 voisinages de $0_{\mathbb{R}^n}$ tel que $u(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^n}$ et $f(x) - f(0) = u_1(x)^2 + \dots + u_p(x)^2 - u_{p+1}(x)^2 - \dots - u_n(x)^2$

Lemme (1) Soit $A_0 \in S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$, soit $\varphi : \begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{R}) & \to & S_n(\mathbb{R}) \\ \Pi & \mapsto & {}^t\Pi A_0 \Pi \end{array}$. Alors :

(i) $D\varphi(I_n)$ est surjective de noyau $\ker(D\varphi(I_n)) = \{ H \in M_n(\mathbb{R}) / A_0 H$ est anti-sym$\}$

(ii) $\exists V \subset S_n(\mathbb{R})$ voisinage de A_0 et $\Psi^{-1} : \begin{array}{ccc} V & \to & GL_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & \Pi \end{array}$ C^1 telle que $A = {}^t\Pi A_0 \Pi$

Démonstration : (i) φ est polynomiale donc C^1 sur $GL_n(\mathbb{R})$. Soit $H \in M_n(\mathbb{R})$:

$$\varphi(I_n + H) = {}^t(I_n + H) A_0 (I_n + H) = A_0 + A_0 H + {}^t H A_0 + {}^t H A_0 H$$

$$= \varphi(I_n) + D\varphi(I_n)(H) + \underset{H \to 0}{o(\|H\|)} \qquad \frac{\|{}^t H A_0 H\|}{\|H\|} \leq \|{}^t H A_0\| \underset{H \to 0}{\to} 0$$

donc $D\varphi(I_n)(H) = A_0 H + {}^t(A_0 H)$

donc $\ker(D\varphi(I_n)) = \{ H \in M_n(\mathbb{R}) / A_0 H$ est anti-symétrique $\}$: de cardinal $\frac{n(n-1)}{2}$; et $\operatorname{rg}(D\varphi(I_n)) = n - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = |S_n(\mathbb{R})|$ donc $D\varphi(I_n)$ est surjective.

(ii) $F = \{ H \in M_n(\mathbb{R}) /$ $A_0 H$ est symétrique $\}$ est un supplémentaire de $\ker(D\varphi(I_n))$ dans $M_n(\mathbb{R})$ contenant I_n.

Soit $\Psi : \begin{array}{ccc} F & \to & S_n(\mathbb{R}) \\ \Pi & \mapsto & \varphi(\Pi) \end{array}$, alors $\underbrace{\ker(D\varphi(I_n)) \cap F}_{\ker(D\Psi(I_n))} = \{0\}$ donc $D\Psi(I_n)$ est bijective

(2) Par le théorème d'inversion locale : $\exists U \subset F$ voisinage ouvert de I_n (qu'on peut supposer contenu dans $GL_n(\mathbb{R})$) (↪ car il est ouvert) tel que Ψ soit un C^1-difféomorphisme de U sur $V = \Psi(U)$. Ainsi, V est un voisinage ouvert de $A_0 = \Psi(I_n) = \varphi(I_n)$ dans $S_n(\mathbb{R})$ et $\forall A \in V$, $\exists ! \Pi \in U$ inversible telle que $A = \Psi(\Pi) = {}^t\Pi A_0 \Pi$ et $\Pi = \Psi^{-1}(A)$ est une fonction ~~continûment~~ C^1 ~~différentiable~~ de A ∎

Démonstration : D'après la formule de Taylor avec reste intégral, autour de $0_{\mathbb{R}^n}$:

$$f(x) = f(0) + Df(0)(x) + \int_0^1 (1-t)^{k+1} D^{2}f(tx)(x)^{2} dt \qquad \text{ordre } k=1$$

$$= f(0) + \int_0^1 (1-t)\, {}^t x\, D^2 f(tx)\, x\, dt = f(0) + {}^t x \cdot Q(x) \cdot x$$

$Q(x) \in S_n(\mathbb{R})$ et Q est fonction C^1 de x au voisinage de $0_{\mathbb{R}^n}$.

Comme $\ker(D^2 f(0)) = \{0\}$ alors $Q(0) \in S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$ donc par le lemme

$\exists N(x) \in GL_n(\mathbb{R})$ fonction C^1 de x telle que $Q(x) = {}^t N(x) Q(0) N(x)$ au voisinage de $0_{\mathbb{R}^n}$

D'où $f(x) = f(0) + {}^t x\, {}^t N(x) Q(0) N(x) x$

Or $Q(0) = \int_0^1 (1-t) D^2 f(0)\, dt = \frac{1}{2} D^2 f(0)$ est de signature $(p, n-p)$ donc par Loi de Sylvester ✓

il existe un changement de variables $u = A N(x) x$ où $A \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que : ①

$${}^t(N(x)x) Q(0) N(x) x = {}^t(A^{-1}u) Q(0) A^{-1} u = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$$

donc $f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$. C'est bien un changement de variables car $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto u(x) = A N(x) x$ est tel que $Du(0) = A N(0) \in GL_n(\mathbb{R})$

donc par le théorème d'inversion locale : c'est un C^1-difféomorphisme entre deux voisinage de $0_{\mathbb{R}^n}$. De plus, on a bien : $u(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^n}$ ∎

① Rombaldi p. 466

FQ : $q : E \to \mathbb{K}$ / $\forall x \in E$, $q(x) = \varphi(x,x)$ où φ est une FB

FQ non dégénérée : si $\ker(q) = \{y \in E / \forall x \in E, \varphi(x,y) = 0\} = \{0\}$ où φ FP

associée à q (l'unique FBS tq $q(x) = \varphi(x,x)$; c'est en fait $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$ / couple $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tq

signature : c'est l'unique ✓ pour toute base $(e_i)_{1 \le i \le n}$ de E orthogonale

Matriciellement à q : $\begin{cases} \text{Card}(e_i / q(e_i) > 0) = s \\ \text{Card}(e_i / q(e_i) < 0) = t \end{cases}$ de plus : $\text{rg}(q) = s + t$

Rappel : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} q(e_1) & \varphi(e_1,e_2) & \dots & \varphi(e_1,e_n) \\ \varphi(e_1,e_2) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \varphi(e_1,e_n) & \dots & \dots & q(e_n) \end{pmatrix}$

Thm : $\exists (f_i)$ CE base dans laquelle $\mathrm{Mat}_{(f_i)}(q) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

cette base est dite orthonormale à q.

Thm de Sylvester : Si $\mathrm{sgn}(q) = (s,t)$ alors $q = \sum_{j=1}^{s} f_j^2 - \sum_{j=s+1}^{s+t} f_j^2$ où les f_i sont indép et $\exists$ B orthogonale dans laquelle $\mathrm{Mat}(q) = \begin{pmatrix} I_s & & \\ & -I_t & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

ici : ${}^t(A^{-1}) Q(0) A^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & I_{n-p} \end{array}\right)$

② p. 180 Théorème d'inversion locale : Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert ; $a \in U$;
$f : U \to \mathbb{R}^n$ C^1 tels que $Df(a) \in GL_n(\mathbb{R})$ ($\det(Df(a)) \neq 0$)
Alors il existe un ouvert $V \subset U$ contenant a et un ouvert W contenant $f(a)$ tels que $f|_V$ est un C^1-difféo entre V et W.

Remarque : $f(x) = y$ admet une unique solution x dans V, mais peut en avoir en dehors : ex : $x^2 = y$ admet $\begin{cases} 2 \text{ solutions sur } \mathbb{R} \text{ si } y \neq 0 \\ 1 \text{ ——————} \quad y = 0 \end{cases}$ ①

Mais localement : on se place sur $]a,b[$, $0 < a < b$: f est C^1 sur $]a,b[$; $c \in]a,b[$
Alors $f'(c) = 2c \neq 0$ donc il existe un ouvert $V \subset]a,b[$ / $c \in V$ et W un ouvert contenant $f(c) = c^2$ tels que $f|_V$ est un C^1-difféo entre V et W
On prend $V =]c-\varepsilon, c+\varepsilon[\subset U$ et $W = f(V) =](c-\varepsilon)^2, (c+\varepsilon)^2[$
et l'équation $f(x) = y$ admet une unique sol $x \in V$, $\forall y \in W$

Remarque : $Df^{-1}(y) = Df(a)^{-1}$ $\forall x \in V$

Dans la pratique : $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$
$= (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$

$\det(Df(a)) \neq 0 \iff \det\left(\left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \end{array}\right]\right) \neq 0$

$\left(\langle Df(a), h \rangle = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right)$

Cette hyp est nécessaire : si f est bijective et si f^{-1} est C^1 en a :

$f^{-1}(f(x)) = x$ d'où : $\underbrace{Df^{-1}(f(a)) \circ Df(a)}_{\text{linéaire}} = id$; il faut bien que $Df(a) \neq 0$

Heuristique : On veut résoudre en l'inconnue x proche de a.

$y = f(x) = f(a) + Df(a)(x-a) + o(\|x-a\|)$; $b = f(a)$

$\Leftrightarrow$ $y - f(a) + o(\|x-a\|) = Df(a)(x-a)$

Si $Df(a) \in GL(\mathbb{R})$: $Df(a)^{-1}(y - f(a) + o(\|x-a\|)) = x-a$

$\Leftrightarrow$ $Df(a)^{-1}(y - f(a)) = x - a + \dots$

$\Leftrightarrow$ $x = a + Df(a)^{-1}(y - f(a)) + \dots$

$\Leftrightarrow$ $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(a)) + Df(a)^{-1}(y - f(a)) + \dots$

Et par définition de la différentielle : $Df(a)^{-1}(y - f(a)) = Df^{-1}(f(a))(y - f(a))$

Donc $Df(a)^{-1} = Df^{-1}(f(a))$

① p. 196 $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Ici f est un difféo local au voisinage de tout point de U mais n'est pas un difféo global

f est C^1 sur U et $\forall (x,y) \in U$, $Df(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$

$\det(Df(x,y)) = 4x^2 + 4y^2 = 0$ ssi $(x,y) = 0 \notin U$

Donc par le th : OK.

On ne peut pas prendre $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car $f(z) = f(-z)$ donc f n'est pas injective

Il est donc nécessaire que V ne contienne pas 2 points opposés du plan complexe. Un ouvert V max ayant cette prop est le demi-plan $\mathrm{Re}(z) > 0$

En effet, si un ouvert V' contient V strictement, il contient z_0 et $-z_0$

$\mathrm{Re}(z_0)<0$ donc contient z_0 et $-z_0$.

Finalement f est un difféo entre le demi-plan et $\mathbb{C}$ privé du demi-axe réel négatif

Théorème d'inversion globale : Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ C^1.
Si f est injective sur U et que $\forall x \in U$, $Df(x) \in GL(\mathbb{R}^n)$ alors $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f est un C^1-difféo de U sur $f(U)$.

③ p. 288 Taylor avec reste intégral : $f \in C^{k+1}$ sur U ; $[a, a+h] \subset U$,

$$f(a+h) = f(a) + Df(a)(h) + \dots + \frac{1}{k!} D^k f(a)(h) + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} D^{k+1} f(a+th)(h)^{k+1}\, dt$$

① p. 201 Le résultat obtenu est que toute forme quadratique réellement variété d'une FQ non dégénérée, lui est équivalente. Elles ont en particulier même signature donc les matrices sym de signature (p,q) / $p+q=n$ forment un ouvert de $S_n(\mathbb{R})$

En appliquant le lemme à $A_0 = I \in S_n \cap GL_n$, on voit que toute matrice sym A proche de I_n admet une racine carrée : $\exists R \in S_n$ / $A = R^2$.

② Lemme de Morse à 2 variables : p. 321 Soient $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction C^3 sur $U \subset \mathbb{R}^2$ contenant l'origine. On suppose que $D^2 f(0,0)$ est non dégénérée

1) Alors $\exists \alpha, \beta, \gamma$ C^1 sur U / $f(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y$
$+ \alpha(x,y)x^2 + \beta(x,y)xy + \gamma(x,y)y^2$

la formule de Taylor avec reste intégral donne :

$$f(x,y) = f(0,0) + Df(0,0)(x,y) + \int_0^1 (1-t)\, D^2 f((tx,ty))(x,y)^2\, dt$$

$$Df(0,0)(x,y) = x \frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) + y \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0)$$

$$D^2 f(tx,ty)(x,y) = \sum_{i,j=1}^{2} x_i x_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(tx,ty) = x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(tx,ty) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(tx,ty) + xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(tx,ty)$$

$$\int_0^1 (1-t)\, D^2 f(tx,ty)(x,y)^2\, dt = \underbrace{x^2 \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(tx,ty)\, dt}_{\alpha(x,y)} + \underbrace{y^2 \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(tx,ty)\, dt}_{\gamma(x,y)}$$
$$+ 2xy \underbrace{\int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(tx,ty)\, dt}_{\beta(x,y)}$$

α, β, γ sont C^1 sur $\mathcal{U}$ par dérivation sous le signe $\int$.

Rq : $\alpha(0,0) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$; $\beta(0,0) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$; $\gamma(0,0) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$

2) On suppose que $\mathrm{sgn}(D^2 f(0,0)) = (1,1)$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \neq 0$

Rq $\exists u, v$ tels que $f(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y + u(x,y)^2 - v(x,y)^2$

et que $\varphi : (x,y) \mapsto (u,v)$ est un C^1-difféo entre 2 voisinages de $0_{\mathbb{R}^2}$.

On peut supposer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) > 0$

Par continuité ; $\alpha > 0$ au voisinage de $(0,0)$. Donc par réduction de Gauss : (Indication)

$$\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 = \alpha\left(x + \frac{\beta}{\alpha} y\right)^2 - \alpha \frac{\beta^2}{\alpha^2} y^2 + \gamma y^2$$
$$= \alpha\left(x + \frac{\beta}{\alpha} y\right)^2 - \left(\frac{\beta^2}{\alpha} + \gamma\right) y^2 = \alpha\left(x + \frac{\beta}{\alpha} y\right)^2 - \left(\frac{\beta^2 - \alpha\gamma}{\alpha}\right) y^2$$

Comme $D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha & 2\beta \\ 2\beta & 2\gamma \end{pmatrix}(0,0)$

Donc $\det(D^2 f(0,0)) = 4(\alpha\gamma - \beta^2)(0,0) < 0$ car $\mathrm{sgn}(D^2 f(0,0)) = (+,-)$

Donc $4\left(\frac{\beta^2 - \alpha\gamma}{\alpha}\right)$ reste > 0 au voisinage de 0

On cherche u, v tq $f(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y + u^2 - v^2$

or $f(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y + \underbrace{\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2}_{\alpha\left(x + \frac{\beta}{\alpha} y\right)^2 - \left(\frac{\beta^2 - \alpha\gamma}{\alpha}\right) y^2}$

On pose $\begin{cases} u(x,y) = \sqrt{\alpha}\left(x + \beta/\alpha\, y\right) \\ v(x,y) = \sqrt{\frac{\beta^2 - \alpha\gamma}{\alpha}}\, xy \end{cases}$ qui sont C^1 au voisinage de $0_{\mathbb{R}^2}$.

f est $\varphi(x,y) \longmapsto (u(x,y), v(x,y))$ est un changement de coordonnées au voisinage de $0_{\mathbb{R}^2}$: $D\varphi(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}(0,0)$

- $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\alpha' \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left(x + \frac{\beta}{\alpha} y\right) + \sqrt{\alpha}\left(1 + \frac{\beta'\alpha - \alpha'\beta}{\alpha^2} y\right) \to \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \sqrt{\alpha}$
- $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\alpha' \frac{1}{\sqrt{\alpha}}(x + \beta/\alpha\, y) + \sqrt{\alpha}\left(\frac{\beta'\alpha - \alpha'\beta}{\alpha^2} y + \frac{\beta}{\alpha}\right) \to \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}$

...

donc $\det(D\varphi(0,0)) = \begin{vmatrix} \sqrt{\alpha} & \beta/\sqrt{\alpha} \\ 0 & \sqrt{\beta' - \alpha\gamma/\alpha} \end{vmatrix}(0,0) = \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}(0,0) > 0$

On est dans le cas d'une bijection locale.

3) Ce résultat reste vrai si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0$ et adapter le résultat si $\operatorname{sgn} = (2,0),(0,2)$.

Comme $D^2 f(0,0)$ est non dégénéré, on doit avoir $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq 0$ et la signature est $(1,1)$.

On pose $x = X+Y$, $y = X-Y$; on note $g(X,Y) = f(x,y)$

$$\begin{cases} X+Y = x \\ X-Y = y \end{cases} \iff \begin{cases} 2X = x+y \\ X-Y = y \end{cases} \iff \begin{cases} X = \frac{x+y}{2} \\ Y = X-y = \frac{x+y}{2} - y = \frac{x-y}{2} \end{cases}$$

Donc $\frac{\partial g}{\partial X}(X,Y) = \frac{\partial}{\partial x} f(X+Y, X-Y) = \frac{\partial X+Y}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x_1}(X+Y, X-Y) + \frac{\partial X-Y}{\partial X}\frac{\partial f}{\partial x_2}(X+Y, X-Y)$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(X+Y, X-Y) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(X+Y, X-Y)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial X^2}(X,Y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(X+Y, X-Y) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(X+Y, X-Y) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(X+Y, X-Y) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(X+Y, X-Y)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x,y) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial X \partial Y}(X,Y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 g}{\partial Y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$$

D'où $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0,0) \neq 0$ donc 2) s'applique à g et donc à f.

* si $D^2 f(0,0)$ est de $\operatorname{sgn}(2,0)$ alors $\alpha(0,0) > 0$ et on reprend la méthode de réduction de Gauss ; et on a $f(x,y) = \dots + u^2 + v^2$

* si $D^2 f(0,0)$ ——— $(0,2)$; on applique ce qui précède à $-f$

Cl : si $D^2 f(0,0)$ est non dégénérée, de signature $(\varepsilon, \eta) = (\pm, \pm)$ on peut construire un changement de coordonnées $(x,y) \mapsto (u,v)$ sur un voisinage de $0_{\mathbb{R}^2}$ tq $f(x,y) = f(0,0) + Df(0,0)(x,y) + \varepsilon u^2 + \eta v^2$.