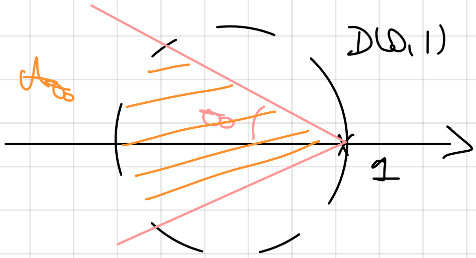
Théorème d'Abel angulaire : Bernis p. 51   207 - 230 - 241 - 243

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R=1$ de somme f.

Soit $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$, soit $\Delta_{\theta_0} = \{1 - \rho e^{i\theta}, \theta \in [-\theta_0, \theta_0], \rho > 0\} \cap D(0,1)$

Si $\sum a_n$ converge, alors $\lim\limits_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.



Démonstration : Notons $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

et $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$; $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$

On constate que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = R_{n-1} - R_n$ transformation d'Abel $\Leftrightarrow$ IPP discrète.

Pour $N \in \mathbb{N}^*$, $\forall z \in D(0,1)$, on a : $\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n (z^n - 1)$

$= \sum_{n=1}^{N} (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) = \sum_{n=1}^{N} R_{n-1}(z^n - 1) - \sum_{n=1}^{N} R_n (z^n - 1)$

$= \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - 1) - \sum_{n=1}^{N} R_n (z^n - 1) = \sum_{n=0}^{N} R_n (z^{n+1} - 1 - z^n + 1) - R_N(z^{N+1} - 1) + 0$

$= \sum_{n=0}^{N} R_n z^n (z - 1) - \underbrace{R_N (z^{N+1} - 1)}_{\xrightarrow[N \to +\infty]{} 0}$ car $R_N \to 0$ et $|z^{N+1} - 1| \leq 2$

$|R_n z^n (z-1)| \leq 2\varepsilon |z|^n$

$\sum_{n=0}^{+\infty} 2\varepsilon |z|^n = 2\varepsilon \frac{1}{1-|z|}$ donc CV

Donc lorsque $N \to +\infty$: $\forall z \in D(0,1)$, $f(z) - S = (z-1) \sum_{n=0}^{+\infty} R_n (z-1)$

Soit $\varepsilon > 0$, par convergence de $\sum a_n$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0$, $|R_n| < \varepsilon$

Par inégalité triangulaire : $\forall z \in D(0,1)$:

$|f(z) - S| \leq |z-1| \left| \sum_{n=0}^{n_0} R_n z^n \right| + |z-1| \left| \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} R_n z^n \right|$

$\leq |z-1| \sum_{n=0}^{n_0} |R_n| + |z-1| \varepsilon \underbrace{\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} |z|^n}_{\leq \frac{1}{1-|z|}}$

Soit $\eta > 0$ tel que $\forall z \in D(0,1) \,/\, |z-1| < \eta$, on ait $|z-1| \sum_{n=0}^{n_0} |R_n| < \varepsilon$

donc $|f(z) - S| \leq \varepsilon + \varepsilon \frac{|z-1|}{1-|z|}$

Supposons de plus que $z \in \Delta_{\theta_0}$ alors $\exists \rho > 0$ et $\theta \in [-\theta_0, \theta_0] \,/\, z = 1 - \rho e^{i\theta}$

En particulier : $|z|^2 = z\bar{z} = 1 + \rho^2 - 2\rho\cos(\theta)$

Donc $\dfrac{|z-1|}{1-|z|} = \dfrac{|z-1|(1+|z|)}{1-|z|^2} = \dfrac{\rho(1+|z|)}{2\rho\cos(\theta)-\rho^2} \leq \dfrac{2}{2\cos(\theta)-\rho}$

Si en outre $\rho = |z-1| \in]0, \cos(\theta_0)[$ ce qui est possible car $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$, on a

$0 < \rho < \cos(\theta_0)$

$0 > -\rho > -\cos(\theta_0)$

$-\cos(\theta_0) < -\rho < 0$

$2\cos(\theta) > 2\cos(\theta_0)$

$2\cos(\theta_0) < 2\cos(\theta)$

$2\cos(\theta_0) - \cos(\theta_0) < 2\cos(\theta) - \rho$

alors : $\dfrac{|z-1|}{1-|z|} \leq \dfrac{2}{2\cos(\theta_0) - \cos(\theta_0)} \leq \dfrac{2}{\cos(\theta_0)}$

Au final : si $|z-1| < \min(\eta, \cos(\theta_0))$ alors : $|f(z) - S| \leq \varepsilon\left(1 + \dfrac{2}{\cos(\theta_0)}\right)$ ∎

Réciproque partielle : Théorème de Tauber faible

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R = 1$ de somme f.

Si : $\exists S \in \mathbb{C} \mid \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = S$ et $a_n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ alors $\sum a_n$ converge et $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Démonstration : Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in]0,1[$; on a :

$$S_N - f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{N} a_n(1-x^n) - \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n$$

D'une part : $\forall x \in]0,1[, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 - x^n = (1-x)(1+x+\dots+x^{n-1}) \leq n(1-x)$

D'autre part : $n|a_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow n|a_n|x^n = \underset{n\to+\infty}{o}(x^n)$ donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum\limits_{n \geq N+1} \frac{n}{N}|a_n|x^n$ converge et :

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n x^n| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{n}{N}|a_n|x^n \leq \sup_{n > N}(n|a_n|)\, \frac{1}{N(1-x)}$$

Donc $\forall x \in]0,1[$, $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $|S_N - f(x)| \leq (1-x)\sum\limits_{n=0}^{N} n|a_n| + \sup\limits_{n > N}(n|a_n|) \times \dfrac{1}{N(1-x)}$

Pour $x = 1 - \frac{1}{N}$: $\left|S_N - f\left(1 - \frac{1}{N}\right)\right| \leq \frac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N} n|a_n| + \sup\limits_{n>N}(n|a_n|)$

$\frac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N} n|a_n| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ par Cesàro ; $\sup\limits_{n>N}(n|a_n|) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$

Finalement : $S_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} S$ i.e $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = S$ ∎