leçons :
216 : Etude métrique des courbes
221 : EDO Linéaires

# Thm fondamental de l'étude locale des courbes dans l'espace

24

Références :
Do Carmo "Differential Geometry of Curves and surfaces" p.19 et p.309

**Thm :** Soit $\left| \begin{array}{ll} I & \text{un intervalle de } \mathbb{R} \\ k : I \to \mathbb{R}_*^+ & \mathcal{C}^1 \\ \tau : I \to \mathbb{R} & \mathcal{C}^0 \end{array}\right.$

Alors il existe une courbe $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^3$, birégulière et paramétrée par longueur d'arc telle que $k$ soit ~~la~~ sa courbure et $\tau$ sa torsion.
De plus, si $\tilde{\alpha}$ est une autre courbe vérifiant ces propriétés, alors il existe $f \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^3)$ une isométrie affine positive de $\mathbb{R}^3$ telle que $f \circ \alpha = \tilde{\alpha}$.

preuve :
On commence par l'existence.
(1) On considère l'EDO linéaire d'ordre 1 dans $\mathbb{R}^9$ suivante :

$$(E) : \begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix}' = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & kI_3 & 0 \\ \hline -kI_3 & 0 & -\tau I_3 \\ \hline 0 & \tau I_3 & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix} \quad \text{où } t,n,b : I \to \mathbb{R}^3$$

Soit $s_0 \in I$ et $(t_0, n_0, b_0)$ une BOND de $\mathbb{R}^3$.
D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, le problème de Cauchy associé à cette condition initiale admet une unique solution globale sur $I$, notée $s \mapsto (t(s), n(s), b(s))$.

(2) <u>MQ $\forall s \in I$ $(t(s), n(s), b(s))$ est une BOND de $\mathbb{R}^3$.</u>
On pose $(\alpha_1, \dots, \alpha_6) = (\langle t,n\rangle, \langle t,b\rangle, \langle n,b\rangle, \langle t,t\rangle, \langle n,n\rangle, \langle b,b\rangle)$
Les $\alpha_i$ sont dérivables et vérifient le système $(E')$ suivant :

$$(E') \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1' = k\alpha_5 - k\alpha_4 - \tau\alpha_2 \\ \alpha_2' = k\alpha_3 + \tau\alpha_1 \\ \alpha_3' = -k\alpha_2 - \tau\alpha_6 + \tau\alpha_5 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_4' = 2k\alpha_1 \\ \alpha_5' = -2k\alpha_1 - 2\tau\alpha_3 \\ \alpha_6' = 2\tau\alpha_3 \end{array} \right.$$

La fonction constante $(0,0,0,1,1,1)$ vérifie $(E')$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_6)(s_0) = (0,0,0,1,1,1)$
donc par l'unicité dans Cauchy-Lipschitz linéaire, on a $(\alpha_1, \dots, \alpha_6) = (0,0,0,1,1,1)$
De plus $\varphi : s \mapsto \det(t(s), n(s), b(s))$ est continue et à valeurs dans $\{-1,1\}$
$I$ étant connexe, $\varphi$ est constante. $\varphi(s_0) = 1$ d'où le résultat □

## (3) Construction de $\alpha$

On pose $\alpha : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ s \longmapsto \int_{s_0}^{s} t(u)\,du \end{cases}$

- $\alpha$ est dérivable et $\forall s \in I \quad \alpha'(s) = t(s)$ donc $\alpha$ $\mathcal{C}^1$ et $\alpha$ paramétrée par longueur d'arc. $\alpha'$ est dérivable.
- $\forall s \in I \quad \alpha''(s) = t'(s) = k(s)\,n(s)$ donc $\alpha''$ est dérivable et $k$ est la courbure de $\alpha$. $k$ ne s'annule pas donc $\alpha$ est birégulière.
- $\forall s \in I \quad \alpha'''(s) = k'(s)\,n(s) + k(s)\,n'(s) = k'(s)n(s) - k^2(s)t(s) - k(s)\tau(s)b(s)$

  D'où $\alpha'''$ continue et $\alpha$ $\mathcal{C}^3$.

De plus, la torsion de $\alpha$ est $\dfrac{\langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \rangle}{-k^2} = \dfrac{k \langle b, k'n - k^2 t - k\tau b \rangle}{-k^2} = \tau$

Donc $\alpha$ convient.

## (4) Unicité

Soit $\bar{\alpha}$ une autre courbe vérifiant ces propriétés.

On note $(\bar{t}_0, \bar{n}_0, \bar{b}_0)$ le trièdre de Frenet de $\bar{\alpha}$ en $s_0$.

$(\bar{t}_0, \bar{n}_0, \bar{b}_0)$ est une BOND de $\mathbb{R}^3$ donc il existe $L \in O^+(\mathbb{R}^3)$ tq

$L(t_0) = \bar{t}_0, \quad L(n_0) = \bar{n}_0, \quad L(b_0) = \bar{b}_0.$

Par l'unicité dans (1) : $\forall s \in I \quad L(t(s)) = \bar{t}(s),\ L(n(s)) = \bar{n}(s),\ L(b(s)) = \bar{b}(s)$

$\forall s \in I \quad L(t(s)) = \bar{t}(s)$ donc les courbes $L \circ \alpha$ et $\bar{\alpha}$ ont même dérivée.

donc les courbes $L \circ \alpha$ et $\bar{\alpha}$ diffèrent d'une constante. □

# Rappels concernant les courbes dans l'espace

Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ $\mathcal{C}^3$, birégulière, paramétrée par longueur d'arc.

## ① Construction de la courbure, de la torsion et du repère de Frénet.

On pose $\forall s \in I \quad t(s) = \alpha'(s)$

$t$ est unitaire donc $\forall s \in I \quad \langle t(s), t'(s) \rangle = 0$

On pose $k(s) = \| t'(s) \| > 0$ et $n(s) = \dfrac{t'(s)}{k(s)}$

$k$ courbure de $\alpha$

On pose $b(s) = t(s) \wedge n(s)$ $\qquad$ $(t, n, b)$ base orthonormée directe en tout temps $s$

$$\forall s \in I \quad b'(s) = \underbrace{t'(s) \wedge n(s)}_{=0} + t(s) \wedge n'(s)$$

$\langle b'(s), t(s) \rangle = 0$ et $\langle b'(s), b(s) \rangle = 0$

On pose $\tau(s)$ l'unique réel tel que $b'(s) = \tau(s)\, n(s)$

$\tau$ torsion de $\alpha$

$$\forall s \in I \quad n(s) = b(s) \wedge t(s)$$

$$\begin{aligned}
\forall s \in I \quad n'(s) &= b'(s) \wedge t(s) + b(s) \wedge t'(s) \\
&= \tau(s)\, n(s) \wedge t(s) + b(s) \wedge k(s)\, n(s) \\
&= -\tau(s)\, b(s) - k(s)\, t(s)
\end{aligned}$$

Résumé
$$\begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix}$$

## ② Formules importantes

$$\forall s \in I \quad k(s) = \| \alpha''(s) \|$$

$$\forall s \in I \quad -\frac{\langle \alpha'(s) \wedge \alpha''(s), \alpha'''(s) \rangle}{k^2(s)} = \tau(s)$$