

Lemme de Morse

Développement pour les leçons 158¹, 170², 171³, 214⁴, 215⁵.

1 Introduction

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ de $\mathbb{R}$. On note $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathbb{R}$. Enfin, on note $\mathcal{AS}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathbb{R}$.

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ telle que $df(0) = 0$ et $d^2f(0)$ soit non-dégénérée de signature $(p, n - p)$. Alors il existe un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme $\varphi : W \rightarrow V$ entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(0) = 0$ et $\forall x \in W$, $f(x) - f(0) = \varphi(x)^T I_{p, n-p} \varphi(x)$.

2 Démonstration du résultat

Étape 1 : Dans un premier temps, on applique la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction f . Du fait que $df(0) = 0$, on obtient que

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 (1-t) d^2f(tx)(x, x) dx = x^T Q(x) x$$

avec $Q : x \mapsto \int_0^1 (1-t) Hf(tx) dt$ qui est une fonction de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$.

Étape 2 : On va démontrer le lemme suivant : soit $A_0 \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe un voisinage ouvert de A_0 dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\rho : V \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall A \in V$, $A = \rho(A)^T A_0 \rho(A)$.

Soit en effet $\chi : M \mapsto M^T A_0 M$ qui va de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Au voisinage de I_n , on a que pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\chi(I_n + H) = \chi(I_n) + (A_0 H)^T + A_0 H + o(\|H\|^2)$$

On obtient ainsi que $d\chi(I_n) \cdot H = (A_0 H)^T + A_0 H$ et donc que $\ker(d\chi(I_n)) = A_0^{-1} \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On considère le sous-espace vectoriel $F = \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A_0 H \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\}$ et $\psi = \chi|_F$. On a $I_n \in F$ et $\ker(d\psi(I_n)) \cap F = \{0\}$. De plus, ψ est à valeur dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\dim(F) = \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$. Ainsi, $d\psi(I_n)$ est bijective. De plus, ψ est $\mathcal{C}^1$ comme restriction d'une application polynomiale.

On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale. Ainsi, il existe U un voisinage de I_n dans F tel que $\psi : U \rightarrow V = \psi(U)$ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme. Quitte à restreindre U en $U \cap \text{GL}_n(\mathbb{R})$, on peut supposer que $U \subset \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Ainsi, V est un voisinage de $A_0 = \psi(I_n)$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $A \in V$, $A = \psi^{-1}(A)^T A_0 \psi^{-1}(A)$. On pose alors $\rho = \psi^{-1}$.

Étape 3 : Du fait que Q est continue et du fait que $Q(0) = \frac{1}{2} d^2f(0)$ est inversible. On obtient alors par le lemme qu'il existe un voisinage W de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $x \in W$, $Q(x) \in V$. On a alors que pour tout $x \in W$, $Q(x) = \rho(Q(x))^T Q(0) \rho(Q(x))$.

On pose alors pour tout $x \in W$, $M(x) = \rho(Q(x))$ et $y = M(x)x$. On a alors que pour tout $x \in W$, $f(x) - f(0) = y^T Q(0) y$.

Étape 4 : Par le théorème d'inertie de Sylvester, il existe $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $A^T Q(0) A = I_{p, n-p}$. On pose alors $\varphi(x) = A^{-1} M(x) x$. On a $f(x) - f(0) = \varphi(x)^T I_{p, n-p} \varphi(x)$. Il suffit juste de vérifier que φ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme.

On sait que φ est $\mathcal{C}^1$ car Q et ρ le sont. Si de plus $h \in W$, on a

$$\varphi(h) - \varphi(0) = A^{-1} M(h) h - A^{-1} M(0) 0 = A^{-1} (M(0) + o(1)) h = A^{-1} M(0) h + o(\|h\|)$$

Ainsi, on a que $d\varphi(0) = A^{-1} M(0)$ qui est inversible, et donc quitte à réduire W on obtient bien que φ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme.

3 Bibliographie

C'est le Rouvière, p344 pour le théorème (exercice 114) et p201 pour le lemme (exercice 66).

-
1. Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.
 2. Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.
 3. Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.
 4. Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.
 5. Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.