

Injectivité de la transformée de Fourier

Développement pour les leçons 201¹, 234², 235³, 236⁴, 239⁵, 250⁶.

1 Introduction

L'objectif de ce développement est de montrer que la transformée de Fourier définie sur $L^1(\mathbb{R})$ est injective. On va pour cela calculer à l'aide du théorème de Cauchy l'intégrale de la gaussienne puis utiliser des approximations de l'unité.

2 Développement

1- Calcul de la transformée de Fourier de la Gaussienne : On considère $a \in \mathbb{R}_+^*$ et on considère la fonction $\gamma_a(x) = e^{-ax^2}$. La fonction est bien dans $L^1(\mathbb{R})$ et donc admet une transformée de Fourier. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a alors

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}_a(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{i\xi x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2 + i\xi x} dx \\ &= e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x + \frac{i\xi}{2a})} dx\end{aligned}$$

où on a mis le polynôme sous forme canonique⁷. On considère la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par $z \mapsto e^{-az^2}$. Cette dernière est holomorphe sur $\mathbb{C}$. Soit $R > 0$, on note $\Gamma(R)$ le lacet définissant un rectangle de sommets $\pm R, \pm R + i\frac{\xi}{2a}$ orienté dans le sens direct. On a d'une part, comme $\mathbb{C}$ est convexe, que

$$\int_{\Gamma(R)} e^{-az^2} dz = 0$$

D'autre part, en décomposant l'intégrale, on a que

$$\int_{\Gamma(R)} e^{-az^2} dz = \int_{-R}^R e^{-ax^2} dx + \int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{-a(R+ix)^2} dx + \int_R^{-R} e^{-a(x+i\frac{\xi}{2a})} dx + \int_{\frac{\xi}{2a}}^0 e^{-a(R+ix)^2} dx$$

et on note $I_1(R), \dots, I_4(R)$ ces intégrales.

Dans un premier temps, on sait que I_1 a une limite quand R tend vers $+\infty$, qui est $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$. D'autre part, on a que

$$|I_2(R)| \leq \int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{-a(R^2-x^2)} dx$$

qui tend vers 0 en $+\infty$ et de même pour I_4 . On a que $I_3(R)$ est une intégrale absolument convergente et qui tend vers l'intégrale qui nous intéresse. D'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x+i\frac{\xi}{2a})} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

et on obtient donc que

$$\hat{\gamma}_a(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$$

-
1. Espaces de fonctions. Exemples et applications.
 2. Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.
 3. Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.
 4. Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.
 5. Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.
 6. Transformation de Fourier. Applications.
 7. Comme quoi ça sert...

2- Injectivité de la transformée de Fourier : On considère $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} = 0$. L'objectif est de montrer que $f = 0$ presque-partout. On note $\gamma_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{x^2}{2s}}$ avec $s > 0$. On note $g_s(x) = e^{iax} \gamma_s(x)$. On a alors d'une part

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(u) \hat{g}_s(u) du &= \int_{\mathbb{R}} f(u) \hat{\gamma}_s(u - a) du \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(u) \hat{\gamma}_s(a - u) du \\ &= f * \hat{\gamma}_s(a) \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{s}} f * \gamma_{\frac{1}{s}}(a) \end{aligned}$$

Mais d'autre part on a par hypothèse que $\hat{f} = 0$ et on a donc

$$\int_{\mathbb{R}} f(u) \hat{g}_s(u) du = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(u) \gamma_s(u) du = 0$$

Mais de plus on a que $\gamma_{\frac{1}{s}}$ est une approximation de l'unité, on a que

$$0 = \lim \|f * \gamma_{\frac{1}{s}} - f\|_1 = \|f\|_1$$

et on obtient donc que $f = 0$.

3 Bibliographie

J'ai juste utilisé *Analyse de Fourier*, El Amrani, p115-116 pour l'injectivité et p156-157 pour le calcul de la transformée de Fourier de la gaussienne..