

Étude des fonctions $\wp$ de Weierstrass

Développement pour les leçons...

1 Introduction

Soient ω_1 et ω_2 deux complexes tels que $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{R}$. On note alors $\Lambda = \{n\omega_1 + m\omega_2, n, m \in \mathbb{Z}\}$ et on dit que Λ est un réseau de $\mathbb{C}$. L'objectif de ce développement est de définir la fonction $\wp_\Lambda$ (que l'on écrira plus simplement $\wp$ par la suite), appelée fonction $\wp$ de Weierstrass associée au réseau Λ . Ces fonctions sont définies pour tout $z \in \mathbb{C}/\Lambda$ par

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda/\{0\}} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

L'objectif de ce développement est de montrer que ces fonctions sont bien définies et qu'elles vérifient l'équation fonctionnelle

$$\wp'(z)^2 = \wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$$

avec g_2 et g_3 des constantes dépendant du réseau Λ définies par

$$g_2 = 60 \sum_{\omega \in \Lambda/\{0\}} \frac{1}{\omega^4}, \quad g_3 = 140 \sum_{\omega \in \Lambda/\{0\}} \frac{1}{\omega^6}$$

2 Propriétés et définitions dont nous aurons besoin dans la suite

Voici quelques propriétés que l'on ne montrera pas durant ce développement mais que nous aurons à utiliser.

Réseaux de $\mathbb{C}$: Soient ω_1 et ω_2 deux complexes vérifiant $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{R}$. On dit que $\Lambda = \{n\omega_1 + m\omega_2, n, m \in \mathbb{Z}\}$ est le réseau engendré par ω_1 et ω_2 .

Fonctions doublement périodiques holomorphes : On dira qu'une fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est doublement périodique s'il existe deux complexes ω_1 et ω_2 vérifiant $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{R}$ et tels que $f(\omega_1 + z) = f(\omega_2 + z) = f(z)$. Cela se réinterprète directement en disant que si ω_1 et ω_2 définissent un réseau Λ , alors f est doublement périodique de période ω_1 et ω_2 si pour tout $\xi \in \Lambda$, $f(z + \xi) = f(z)$. On remarque directement, à l'aide du théorème de Liouville, qu'une fonction holomorphe doublement périodique est constante sur $\mathbb{C}$. Afin d'en trouver des exemples non-triviaux, il faut imposer moins de conditions sur f . On peut montrer qu'il ne peut exister de fonctions doublement périodiques qui ne possèdent que des pôles d'ordre 1 à l'aide de la formule des résidus.

Lemme fondamental : Si (ω_1, ω_2) forme un réseau de $\mathbb{C}$, alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$|x\omega_1 + y\omega_2| \geq \delta \sqrt{x^2 + y^2}$$

En effet, on considère la fonction $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$f(\theta) = |\cos(\theta)x + \sin(\theta)y|$$

On a $f > 0$, sinon on aurait qu'il existe $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ tel que $f(\theta_0) = 0$ et cela contredirait le fait que $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{R}$. Ainsi, comme f est continue sur le compact $[0, 2\pi]$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$f(\theta) > \delta$$

Si maintenant $x, y \in \mathbb{R}$. Si $x = y = 0$, c'est gagné. Sinon, on a

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 = 1$$

et on se ramène ainsi au cas de la fonction f et on obtient ainsi le résultat. $\square$

Critère de Weierstrass : Soit (f_n) une suite de fonction holomorphes définie sur un ouvert Ω . Supposons qu'il existe une suite (a_n) de réels positifs tels que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n < \infty$$

et qui vérifie de plus que pour tout $z \in \Omega$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a que

$$|f_n(z)| < a_n$$

Alors la fonction $f = \sum_n f_n$ définit une fonction holomorphe sur Ω et on a aussi que $f' = \sum_n f'_n$. Cela reste aussi vrai si l'on remplace la suite (f_n) par une suite indexée sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

3 Étude des fonctions $\wp$

Dans toute la suite, on considère un réseau Λ donné par deux complexes ω_1 et ω_2 . Quitte à considérer la fonctions $\wp - \frac{1}{z^2}$, il suffit juste de montrer que

$$\sum_{\omega \in \Lambda / \{0\}} \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}$$

définit bien une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \Lambda$. On va pour cela montrer que $\wp$ est bien défini sur le disque fermé de centre 0 et de rayon R et ce pour tout $R > 0$. Notons tout d'abord qu'il suffit de montrer que la somme qui définit $\wp$ est bien définie moins un nombre fini de terme qu'il suffira de rajouter par la suite (cela provient du fait qu'une somme finie de fonctions holomorphe est holomorphe).

Soit donc $R > 0$. On note $\Lambda_R = \{\omega \in \Lambda \mid |\omega| < 2R\}$. Par le lemme fondamental, on a directement qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\Lambda_R = \left\{ n\omega_1 + m\omega_2 \mid n, m \in \mathbb{Z}, n^2 + m^2 \leq \frac{4R^2}{\delta^2} \right\}$ et ainsi Λ_R est un sous-ensemble fini de Λ . Il suffit donc de montrer que la fonction

$$\sum_{\omega \in \Lambda / \Lambda_R} \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}$$

est bien défini. On va montrer que cette somme est bien défini sur le disque de centre 0 et de rayon R . Soit donc $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$. Alors on a que $|z| < \frac{1}{2}|\omega|$ et donc que pour tout $\omega \in \Lambda \setminus \Lambda_R$, on a que (refaire un dessin si j'ai un bug sur les inégalités) :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| &= \left| \frac{\omega^2 - (z - \omega)^2}{\omega^2(z - \omega)^2} \right| \\ &= \left| \frac{2z\omega - z^2}{\omega^4 \left(\frac{z}{\omega} - 1 \right)^2} \right| \\ &\leq \frac{5R \frac{|\omega|}{2}}{\frac{|\omega|^4}{4}} \\ &\leq \frac{10R}{\delta^3 (n^2 + m^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Or, on a que

$$\begin{aligned} \sum_{(n,m) \neq (0,0)} \frac{1}{(n^2 + m^2)^{\frac{3}{2}}} &= \sum_{k \geq 1} \sum_{\max(|n|, |m|) = k} \frac{1}{(n^2 + m^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= 4 \sum_{k \geq 1} \sum_{\max(n,m) = k \text{ et } n, m \geq 1} \frac{1}{(n^2 + m^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &\leq 4 \sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{k^2} \sum_{\max(n,m) = k \text{ et } n, m \geq 1} 1 \right) \\ &= 8 \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2} \end{aligned}$$

qui est bien une série convergente. Ainsi, par le critère de Weierstrass, on a bien que $\wp$ est bien définie sur tout disque de centre 0 et de rayon R , et donc $\wp$ définit bien une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \Lambda$.

Avant de pouvoir montrer que $\wp$ vérifie l'équation fonctionnelle $\wp'(z)^2 = \wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$, on doit montrer que $\wp$ est doublement périodique de période ω_1 et ω_2 et que $\wp$ est paire. Il est direct de constater que $\wp$ est paire. Montrons alors qu'elle est doublement périodique de période ω_1 et ω_2 . On va pour cela passer par la série dérivée. En effet, le critère de Weierstrass nous donne directement que

$$\wp'(z)' = \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{-2}{(z - \omega)^3}$$

qui est absolument convergente. Donc il est aisé de vérifier que $\wp'(z + \xi) = \wp'(z)$ pour tout $\xi \in \Lambda$. Ainsi, en intégrant, on a que $\wp(z + \xi) = \wp(z) + c(\xi)$ où c ne dépend pas de z . En évaluant en $z = -\frac{1}{2}\xi$, on obtient que $c = 0$.

Montrons maintenant que $\wp'(z)^2 = \wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$. Tout d'abord, la fonction définie par $\wp(z) - \frac{1}{z^2}$ définit une fonction holomorphe au voisinage de 0 qui s'annule. De plus, cette fonction est paire. Elle admet donc un développement limité et on a

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \lambda z^2 + \mu z^4 + z^6 h(z)$$

avec h une fonction holomorphe bornée au voisinage de 0. Ainsi, on obtient aussi que

$$\wp'(z) = \frac{-2}{z^3} + 2\lambda z + 4\mu z^3 + 6z^5 h(z) + z^6 h'(z)$$

On obtient alors directement que

$$\begin{aligned}\wp(z)^3 &= \frac{1}{z^6} + \frac{3\lambda}{z^2} + 3\mu + o(z) \\ \wp'(z)^2 &= \frac{4}{z^6} - \frac{8\lambda}{z^2} - 16\mu + o(z)\end{aligned}$$

On considère alors la fonction définie par $k(z) = \wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + g_2\wp(z) + g_3$ avec $g_2 = 20\lambda$ et $g_3 = 28\mu$. La fonction k est doublement périodique suivant le réseau Λ et au voisinage de son pôle en 0 on a que $k(z) = o(z)$. Ainsi, k est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et vérifie $k(0) = 0$, d'où l'égalité cherchée. Pour obtenir les expressions de g_2 et g_3 , on regarde le développement limité de $\wp(z) - \frac{1}{z^2}$.

4 Bibliographie

J'ai utilisé *Complex Algebraic Curves* de Frances Kirwan, page 115. Le développement demande du travail en amont (le livre détaille pas vraiment les preuves et c'est mieux de savoir à quoi ça sert et compagnie) et, franchement, il s'improvise pas très bien. Je le déconseille donc dans l'ensemble.