

# Critère de Weyl

Développement pour les leçons 209<sup>1</sup>, 223<sup>2</sup>.

## 1 Introduction

Dans toute la suite,  $(u_n)$  est une suite de réels de l'intervalle  $[0, 1]$ . On note, pour  $0 \leq a \leq b \leq 1$ , le réel  $X_n(a, b) = \text{Card} \{1 \leq k \leq n \mid u_k \in [a, b]\}$ . On dira que la suite  $(u_n)$  est équirépartie si et seulement si  $\frac{X_n(a, b)}{n}$  converge vers  $b - a$  pour tout  $a \leq b \in [0, 1]$ . On peut facilement montrer que cette condition implique le fait que  $(u_n)$  est dense dans  $[0, 1]$ , mais que cette condition est plus forte. Dans la suite, si  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue, on notera pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $L_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f(u_k)$ . L'objectif de ce développement est de démontrer un critère du à Weyl qui stipule que l'on a équivalence entre

1. La suite  $(u_n)$  est équirépartie.
2. Pour tout  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f(u_k) = \int_0^1 f(t) dt$ .
3. Pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2i\pi p u_k} \right) = 0$ .

## 2 Développement

On va montrer les différentes implications. Rien de fou dans la stratégie de preuve.

**1  $\Rightarrow$  2 :** On considère  $a, b \in [0, 1]$ . On a alors  $\frac{X_n(a, b)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \chi_{[a, b]}(u_k)$  avec  $\chi_{[a, b]}$  la fonction indicatrice de  $[a, b]$ . On va montrer que la propriété est d'abord vraie pour les indicatrices d'intervalles, puis les fonctions en escalier, puis on conclue par densité.

Si  $a, b \in [0, 1]$ , on a que  $\int_0^1 \chi_{[a, b]}(t) dt = b - a = \lim \frac{X_n(a, b)}{n}$  et la propriété est vraie pour les indicatrices d'intervalle. Par linéarité de la somme et de l'intégrale, la propriété est clairement vraie pour les combinaisons linéaires d'indicatrices d'intervalles.

Soit maintenant  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Par densité des fonctions en escalier, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une fonction  $g$  en escalier telle que  $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$ . On a alors l'inégalité suivante (on fait apparaître  $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n g(u_k)$  et  $\int_0^1 g(t) dt$ ) :

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f(u_k) - \int_0^1 f(t) dt \right| \leq \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n (f(u_k) - g(u_k)) \right| + \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n g(u_k) - \int_0^1 g(t) dt \right| + \left| \int_0^1 g(t) dt - \int_0^1 f(t) dt \right|$$

Le premier terme est, après un coup d'inégalité triangulaire, majoré par  $\varepsilon$  car  $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$ , comme la troisième inégalité. Le second terme est plus petit que  $\varepsilon$  à partir d'un certain rang (la propriété est vraie pour les fonctions en escalier). Ainsi, on obtient bien la convergence attendue.

**2  $\Rightarrow$  1 :** On veut montrer que pour tout  $a, b \in [0, 1]$ , on a  $\frac{X_n(a, b)}{n}$  qui converge vers  $b - a$ . Si  $a = b$ , c'est direct. Sinon, on va supposer dans un premier temps que  $0 < a < b < 1$ <sup>3</sup>. On note  $I = [a, b]$  et on considère les fonctions  $\phi_p$  et  $\varphi_p$  comme définie dans FGN. Pour  $p$  assez grand, on aura que  $\psi_p \leq \chi_I \leq \varphi_p$ . On a ainsi que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \psi_p(u_k) \leq \frac{X_n(a, b)}{n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi_p(u_k)$$

Mais  $\psi_p$  est continue, de même pour  $\varphi_p$ , et on en déduit que les deux quantités convergent vers  $b - a \pm \frac{1}{p}$ . Soit donc  $\varepsilon > 0$  et  $p$  tel que  $\frac{1}{p} < \varepsilon$ . Alors on aura bien que, à partir d'un certain rang,  $\left| \frac{X_n(a, b)}{n} - (b - a) \right| \leq 2\varepsilon$  et on en déduit la propriété. Si  $a = 0$  et  $b < 1$ , la propriété se montre de manière identique (on ne fait la construction que d'un côté). De même si  $0 < a < b = 1$ . Enfin, si  $a = 0$  et  $b = 1$ , la propriété se montre directement.

**2  $\Rightarrow$  3 :** C'est direct, on va obtenir l'intégrale de la fonction  $x \mapsto e^{2i\pi p x}$  qui est 1-périodique. Donc c'est direct.

- 
1. Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples et applications.
  2. Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.
  3. Cette hypothèse est importante pour la manière dont on construit les fonctions. Voilà voilà...

**3  $\Rightarrow$  2 :** Là ça va être un poil plus *tricky*. On va commencer par montrer que la propriété est vraie pour les polynômes trigonométriques, puis montrer qu'elle s'étend naturellement par densité. Soit donc  $P$  un polynôme trigonométrique. Alors il existe des coefficients  $(c_j)$  tels que pour tout  $x \in [0, 1]$

$$P(x) = \sum_{j=-d}^d c_j e^{2i\pi jx}$$

Ainsi, par hypothèse, on a que  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P(u_k)$  converge vers  $c_0$  qui est exactement l'intégrale de  $P$  (pour se faire, on sépare la somme en deux, interverti les sommes et on applique l'hypothèse).

On va maintenant considérer une fonction  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que  $f(0) = f(1)$ . On va alors avoir de la même manière que pour 2  $\Rightarrow$  1 le résultat par densité des polynômes trigonométriques.

Supposons maintenant que  $f(0) \neq f(1)$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . On considère alors deux fonctions  $g, h$ , continues et qui vérifie  $h \leq f \leq g$ ,  $\int_0^1 g - h \leq \varepsilon$ ,  $g(0) = g(1)$  et  $h(0) = h(1)$ . Par ce qui précède, on a à partir d'un certain rang que

$$\left| L_n(g) - \int_0^1 g(t)dt \right| \leq \varepsilon, \quad \left| L_n(h) - \int_0^1 h(t)dt \right| \leq \varepsilon$$

De plus, on a  $L_n(h) \leq L_n(f) \leq L_n(g)$ . On obtient donc que

$$\liminf L_n(h) \leq \liminf L_n(f) \quad \text{et} \quad \limsup L_n(f) \leq \limsup L_n(g)$$

On obtient ainsi que

$$\int_0^1 f(t)dt - \varepsilon \leq \int_0^1 h(t)dt = \liminf L_n(h) \leq \liminf L_n(f) \leq \limsup L_n(g) \leq \int_0^1 f(t)dt + \varepsilon$$

### 3 Bibliographie

C'est d'abord dans *Analyse 2* de FGN, mais la fin est bof donc on fait une version maison pas compliquée pour un sou.