205 Espaces complet
208 Applications continues linéaires

# Théorème de l'application ouverte (Rudin ch. 5)

**Théorème :** 1) Soient $(E, F)$ deux espaces de Banach et $T : E \to F$ linéaire surjective alors $\exists r > 0$ t.q. $T(B_E(0;1)) \supset B_F(0;r)$
2) $T$ est ouverte.

Preuve : Montrons que $1) \Rightarrow 2)$
Soit $U$ ouvert de $E$ et $y_0 \in T(U)$. On a $y_0 = T(x_0)$. Comme $U$ est ouvert, il existe $a > 0$ tel que $B_E(x_0; a) \subset U$, i.e. $x_0 + a B_E(0;1) \subset U$
Donc $T(U) \supset T(x_0 + a B_E(0;1)) = T(x_0) + a T(B_E(0;1))$
Donc $T(U) \supset y_0 + B_F(0; ar) = B_F(y_0; ar)$
Donc $T(U)$ est ouvert

Montrons 1) : a) Lemme : Si $a \in \mathbb{R}^*$, $a\overline{T(B_E(0;1))} = \overline{aT(B_E(0;1))}$

Si $a \in \mathbb{R}^*$, $F \xrightarrow{\varphi} F$, $x \mapsto ax$ est un homéomorphisme. Si $V \subset F$, alors
$\varphi(\overline{V}) \subset \overline{\varphi(V)}$ par continuité de $\varphi$.
$\varphi^{-1}(\overline{\varphi(V)}) \subset \overline{\varphi^{-1}(\varphi(V))} = \overline{V}$ par continuité de $\varphi^{-1}$. Donc $\overline{\varphi(V)} = \varphi(\overline{V})$
Donc si $V = T(B_E(0;1))$, $\overline{a T(B_E(0;1))} = a \overline{T(B_E(0;1))}$.

b) Mq $\exists r_1 > 0$, $\overline{T(B_E(0;1))} \supset B_F(0; r_1)$

$T$ est surjective. On a le recouvrement suivant $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{T(B_E(0;n))}$
(on prend des fermés pour Baire) Donc il existe $n_0$ tel que $\overline{T(B_E(0;n_0))}$ soit d'intérieur non vide par Baire car $F$ est complet
Donc $\exists (x; \eta) \in E \times \mathbb{R}_+^*$ $\overline{T(B_E(0;n_0))} \supset B_F(x; \eta)$ par le théorème de Baire.
On $-B_F(x;\eta) \subset -\overline{T(B_E(0;n_0))} \underset{\text{lemme}}{=} \overline{-T(B_E(0;n_0))} = \overline{T(B_E(0;n_0))}$

Donc $\underbrace{B_F(x;\eta) - B_F(x;\eta)}_{B_F(0;2\eta)} \subset \overline{T(B_E(0;n_0))} + \overline{T(B_E(0;n_0))}$
$\subset 2\, \overline{T(B_E(0;n_0))}$

Donc $B_F(0; 2\eta) \subset 2n_0 \overline{T(B_E(0;1))} = 2n_0 \overline{T(B_E(0;1))}$ lemme

Donc $\overline{T(B_E(0;1))} \supset B_F(0; \frac{\eta}{n_0})$

OK pour $r_1 = \frac{\eta}{n_0}$.

c) Montrons que $T(B_E(0;1)) \supset B_F(0; \frac{r_1}{2})$

Soit $y \in B_F(0; \frac{r_1}{2})$ $\quad y \in \overline{T(B_E(0; \frac{1}{2}))}$ (par 2) ⊕ lemme)

Donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \|z\|_E < \frac{1}{2}$ t.q. $\|y - Tz\|_F < \varepsilon$.

Appliqué à $\varepsilon = \frac{r}{2}$, $\exists \|z_1\|_E < \frac{1}{2}$ tq $\|y - Tz_1\|_F < \frac{r_1}{2}$.

A partir de là, on est amené à construire $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

i) $\|z_k\|_E < \frac{1}{2^k}$

ii) $\|y - T(z_1 + \dots + z_k)\|_F < \frac{r_1}{2^k}$.

$k = 1$ : OK

Hérédité : Si $(z_1 \dots z_k)$ sont construits, alors $(y - T(z_1 + \dots + z_k)) \in B_F(0; \frac{r_1}{2^{k+1}}) \subset \overline{T(B_E(0; \frac{1}{2^{k+1}}))}$

Donc $\exists \|z_{k+1}\|_E < \frac{1}{2^{k+1}}$ t.q. $\|y - T(z_1 + \dots + z_{k+1})\| < \frac{r_1}{2^{k+1}}$. OK.

Posons $x_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$ et $y_n = T(x_n)$ $\quad \sum_{k\in\mathbb{N}} z_k$ converge absolument

Donc comme $E$ est complet, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $x$ de $E$.

De plus $\|y_n - y\|_F < \frac{r}{2^{n+1}}$. Donc $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $y$ dans $F$.

Or, $T$ est continu. Donc $Tx_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Tx$ et $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} y$ Donc $y = Tx$

Enfin, $\|x\| \leq \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \|z_k\| < \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2^k} = 1$

Donc $y \in T(B_E(0;1))$