

Théorème de Banach-Steinhaus + série de Fourier qui diverge en 0

Développement pour les leçons 205¹, 208², 230³, 246⁴.

1 Introduction

Le but de ce développement est double. D'abord, on démontre le théorème de Banach-Steinhaus puis on l'applique pour montrer l'existence d'une fonction dont la série de Fourier diverge en 0. On doit utiliser pour cela le théorème de Baire que l'on rappelle ici : soit E un espace de Banach. Alors E vérifie la propriété de Baire, c'est-à-dire que toute intersection dénombrable d'ouverts denses de E est dense. Cette assertion est équivalente au fait que toute union dénombrable de fermés d'intérieur non-vide est non-vide.

2 Théorème de Banach-Steinhaus et démonstration

Énonçons dans un premier temps le théorème. Soit E un espace de Banach et F un espace vectoriel normé de norme. Soit $H \subset \mathcal{L}(E, F)$. Alors ou bien il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall f \in H, \|f\| < M$, ou bien il existe $x \in E$ tel que $\sup_{f \in H} \|f(x)\| = +\infty$.

Pour la démonstration, on reprend les notations de l'énoncé. Afin de démontrer ce résultat, on introduit l'ensemble $\Omega_k = \{x \in E \mid \sup_{f \in H} \|f(x)\| > k\}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Ces ensembles sont ouverts : si $x_0 \in \Omega_k$, alors il existe $f \in H$ tel que $\|f(x_0)\| > k$. Or, f est continue donc il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in \mathcal{B}(x_0, r)$, on a $\|f(x)\| > k$, donc $\mathcal{B}(x_0, r) \subset \Omega_k$. Si maintenant tous les Ω_k sont denses, alors $\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \Omega_k$ est dense dans E , donc elle est notamment non-vide. Ainsi, si $x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \Omega_k$, on a bien que $\sup_{f \in H} \|f(x)\| = +\infty$.

Supposons maintenant que l'un des ensembles Ω_k ne soit pas dense. Alors il existe $r > 0$ et $x_0 \in E$ tel que $\mathcal{B}(x_0, r) \cap \Omega_k = \emptyset$. Donc pour tout $x \in \mathcal{B}(x_0, r)$, on a que pour tout $f \in H$, $\|f(x)\| \leq k$. Ainsi, on a pour tout $x \in \mathcal{B}(0, r)$, pour tout $f \in H$,

$$\|f(x)\| = \|f(x + x_0) - f(x_0)\| \leq \|f(x + x_0)\| + \|f(x_0)\| \leq 2k$$

Ainsi, on a pour tout $f \in H$, pour tout $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$,

$$\|f(x)\| = \frac{1}{r} \|f(rx)\| \leq \frac{2k}{r}$$

Ainsi, pour tout $f \in H$, on a bien que $\|f\| \leq \frac{2k}{r} < +\infty$.

3 Série de Fourier qui diverge en zéro

L'objectif de cette partie va être d'appliquer le théorème de Banach-Steinhaus afin de prouver qu'il existe une fonction dont la série de Fourier diverge en 0. Pour cela, on introduit avant quelques notations.

On considère $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont 2π -périodiques et continues, que l'on munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour tout $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, pour $p \in \mathbb{Z}$, on note $c_p(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ipt} dt$ le p -ième coefficient de Fourier de f . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note D_n le noyau de Dirichlet, c'est à dire la fonction valant $\frac{\sin(\frac{(2n+1)t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}$ sur $] -\pi, \pi[\setminus \{0\}$ et $2n+1$ en 0. Enfin, on considère pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'application $l_n : \mathcal{C}_{2\pi} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\forall f \in \mathcal{C}_{2\pi}, \quad l_n(f) = \sum_{p=-n}^n c_p(f)$$

On va tout d'abord montrer que les l_n sont bien des applications linéaires continues et calculer leurs normes. Il n'y a aucune difficulté pour voir que l_n est continue. Soit donc $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$. Du fait que $\sum_{p=-n}^n e^{ipt} = D_n(t)$, on a

$$l_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t) dt$$

Supposons de plus que $\|f\|_\infty = 1$, on a alors

$$|l_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt$$

On considère maintenant $\varepsilon > 0$ et on pose pour $t \in]-\pi, \pi[$, $f_\varepsilon(t) = \frac{D_n(t)}{|D_n(t)| + \varepsilon}$. On a $\|f_\varepsilon\|_\infty \leq 1$ et, de plus,

-
1. Espaces complets. Exemples et applications.
 2. Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.
 3. Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.
 4. Séries de Fourier. Exemples et applications.

$$l_n(f_\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{D_n(t)^2}{|D_n(t)| + \varepsilon} dt$$

Notons $h_\varepsilon(t) = \frac{D_n(t)^2}{|D_n(t)| + \varepsilon}$. Alors si $\varepsilon' < \varepsilon$, on a $h_\varepsilon < h_{\varepsilon'}$ et donc, par théorème de convergence monotone, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |l_n(f_\varepsilon)| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt$$

et on obtient donc que $|||l_n||| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt$. Or, on a $|||l_n||| \rightarrow +\infty$. En effet, on sait d'une part que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $|\sin(\frac{t}{2})| \leq |\frac{t}{2}|$ et donc que

$$|||l_n||| \geq \frac{1}{2\pi} 2 \int_0^\pi \frac{\left| \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) \right|}{\left| \frac{t}{2} \right|} dt \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{(2n+1)\pi}{2}} \left| \frac{\sin(u)}{u} \right| du$$

L'intégrale de droite étant divergente, on a bien que $\sup_{n \in \mathbb{N}^*} |||l_n||| = +\infty$. Or, $\mathcal{C}_{2\pi}$ est un sous-espace fermé de l'ensemble des fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui est complet, donc c'est un espace complet et le théorème de Baire permet de conclure.

4 Bibliographie

On utilise uniquement *Analyse* de Gourdon (p424). C'est bien pour une fois...