

Topologie des classes de similitudes

Développement pour les leçons 153¹, 155², 157³.

1 Introduction

On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $S(A)$ la classe de similitude de la matrice A pour la relation de similitude. L'objectif de ce développement va être de montrer les deux assertions suivantes :

1. On a A diagonalisable si et seulement si $S(A)$ est fermée.
2. On a A nilpotente si et seulement si la matrice nulle est dans l'adhérence de $S(A)$.

Étant donné que l'on raisonne à similitude près dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on peut supposer sans perte de généralité que A est triangulaire supérieure (rappelons à toute fins utiles que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos). On va d'abord montrer un lemme énonçant que $S(A)$ contient toujours une matrice ayant la même diagonale que A mais ayant ses coefficients non-diagonaux aussi petit que l'on veut, puis l'on montrera les deux assertions.

2 Développement

Démonstration du lemme : Soit $\varepsilon > 0$. On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et f l'endomorphisme ayant pour matrice A dans la base $\mathcal{B}$. On a alors pour tout $j \in [1, n]$, $f(e_j) = \sum_{i=0}^j t_{i,j} e_i$. On considère alors la base $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ avec $e'_i = \varepsilon^i e_i$. Ainsi, on a pour tout $j \in [1, n]$,

$$f(e'_j) = f(\varepsilon^j e_j) = \varepsilon^j f(e_j) = \sum_{i=1}^j t_{ij} \varepsilon^j e_i = \sum_{i=1}^j t_{ij} \varepsilon^j \frac{e'_i}{\varepsilon^i} = \sum_{i=1}^j \varepsilon^{j-i} e'_i$$

En notant A' la matrice de l'endomorphisme associé à f dans la base $\mathcal{B}'$, on voit que A' a la même diagonale que A mais ses coefficients diagonaux sont tous inférieurs à ε , d'où le résultat.

Démonstration de l'assertion 1 : Si $S(A)$ est fermée, on peut considérer par le lemme une suite de matrice (A_p) qui converge vers la diagonale de A . Ainsi, par hypothèse de fermeture, on a que A est diagonalisable.

Réciproquement, supposons que A soit diagonalisable. On considère une suite (A_p) dans $S(A)$ qui converge vers une matrice B . Montrons que B est semblable à A . Par hypothèse, on a pour tout $p \in \mathbb{N}$ que A_p est semblable à A , donc $\chi_{A_p} = \chi_A$. On a donc, par continuité du déterminant, que $\chi_A = \chi_{A_p}$ converge vers χ_B et donc $\chi_A = \chi_B$. De plus, comme A est diagonalisable, on a que μ_A est scindé à racines simples et $\mu_A(A_p) = 0$, d'où $\mu_A(B) = 0$ et donc B est diagonalisable. Ainsi, A et B sont diagonalisables et ont les mêmes valeurs propres comptées avec multiplicités, elles sont donc similaires et donc $B \in S(A)$.

Démonstration de l'assertion 2 : Si A est nilpotente, on peut alors considérer une suite de matrices (A_p) ayant tout leurs coefficients inférieurs à $\frac{1}{p}$ (rappelons que A est triangulaire supérieure nilpotente, donc tout ses éléments diagonaux sont nuls). Ainsi, on a que la suite (A_p) converge vers 0 et donc 0 est adhérent à $S(A)$.

Réciproquement, si 0 est dans l'adhérence de $S(A)$, soit (A_p) une suite de matrices similaires à A qui convergent vers 0. Alors $\chi_A = \chi_{A_p}$ qui converge vers $\chi_0 = X^n$. D'où $\chi_A = X^n$ et donc A est nilpotente.

3 Bibliographie

J'ai juste utilisé *Oraux X-ENS, algèbre tome 2*.

1. Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
2. Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.
3. Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.