

Dénombrement des endomorphismes diagonalisables sur $\mathbb{F}_q$

Développement pour les leçons 101¹, 104², 106³, 123⁴, 150⁵, 153⁶, 154⁷, 155⁸, 190⁹.

1 Introduction

Soit q une puissance d'un nombre premier, E un $\mathbb{F}_q$ -espace vectoriel de dimension n . On note $\mathcal{D}(E)$ l'ensemble des endomorphismes diagonalisables sur E . L'objectif de ce développement est de dénombrer cet ensemble. Plus précisément, on va montrer que

$$|\mathcal{D}(E)| = \sum_{\substack{(m_1, \dots, m_q) \in \mathbb{N}^q \\ m_1 + \dots + m_q = n}} \frac{|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)|}{\prod_{i=1}^q |\mathrm{GL}_{m_i}(\mathbb{F}_q)|}$$

Dans toute la suite, on travaillera dans une base fixée de E . Dans la suite, on considérera une numérotation $\{\lambda_1, \dots, \lambda_q\}$ des éléments de $\mathbb{F}_q$.

2 Démonstration du développement

On va procéder par étape.

Étape 1 : On va tout d'abord montrer que

$$\mathcal{D}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u^q = u\}$$

Si $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifie que $u^q = u$, alors $X^q - X$ est annulateur de u . Mais

$$X^q - X = \prod_{i=1}^q (X - \lambda_i)$$

qui est un polynôme scindé à racines simples et donc u est diagonalisable. Réciproquement, si u est diagonalisable, alors il existe $P \in \mathbb{F}_q[X]$ tel que $P(u) = 0$ et P est scindé à racines simples et ses racines sont dans $\mathbb{F}_q$, donc P divise $X^q - X$ et ainsi on a que $u^q = u$.

Étape 2 : On rappelle que l'on a numéroté les éléments de $\mathbb{F}_q$. Soit $u \in \mathcal{D}(E)$, alors $u^q = u$ et donc $X^q - X = \prod_{i=1}^q (X - \lambda_i)$ et les polynômes $(X - \lambda_i)$ sont deux-à-deux premiers entre-eux. Ainsi, on a que

$$E = \bigoplus_{i=1}^q \ker(u - \lambda_i \mathrm{Id})$$

Étape 3 : On va dénombrer $\mathcal{D}(E)$ en montrant qu'il est en bijection avec un ensemble plus simple à dénombrer. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble défini par

$$\mathcal{F} = \left\{ (E_1, \dots, E_q) \text{ sev de } E \mid E = \bigoplus_{i=1}^q E_i \right\}$$

alors $\mathcal{F}$ et $\mathcal{D}(E)$ sont en bijection, et cette bijection est donnée par l'application

$$\phi : u \mapsto (\ker(u - \lambda_i \mathrm{Id}))_{i \in \{1, \dots, q\}}$$

Tout d'abord, l'étape 2 nous permet de dire que ϕ est bien définie comme $u \in \mathcal{D}(E)$. Montrons que ϕ est injective puis surjective.

Soit $u, v \in \mathcal{D}(E)$ tels que $\phi(u) = \phi(v)$. Montrons alors que $u = v$. On a alors pour tout $i \in \{1, \dots, q\}$, si l'on note $E_i = \ker(u - \lambda_i \mathrm{Id}) = \ker(v - \lambda_i \mathrm{Id})$, on a $u|_{E_i} = v|_{E_i}$. Mais comme $E = \bigoplus_{i=1}^q E_i$, on a bien que $u = v$.

Soit $\varepsilon = (E_1, \dots, E_q) \in \mathcal{F}$. On considère u l'application définie par $u|_{E_i}(x) = \lambda_i x$. Alors u est diagonalisable et $\phi(u) = \varepsilon$ par construction. Ainsi, on obtient bien que ϕ est bijective.

-
1. Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
 2. Groupes abéliens et non abéliens finis. Exemples et applications.
 3. Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E , sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.
 4. Corps finis. Applications.
 5. Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.
 6. Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
 7. Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.
 8. Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.
 9. Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

Étape 4 : On va maintenant pouvoir travailler plus simplement sur $\mathcal{F}$. Pour cela, on va faire agir $\text{GL}(E)$ sur $\mathcal{F}$ par

$$u \cdot (E_1, \dots, E_q) = (u(E_1), \dots, u(E_q))$$

Comme $u \in \text{GL}(E)$, on a bien que $\bigoplus_{i=1}^q u(E_i) = E$ et l'action est bien définie. Soit $\varepsilon = (E_1, \dots, E_q) \in \mathcal{F}$. On va étudier l'orbite et le stabilisateur de ε .

On a $\text{Orb}(\varepsilon) = \{(F_1, \dots, F_q) \in \mathcal{F} \mid \dim E_i = \dim F_i\}$. L'inclusion de gauche à droite est évidente étant donné que l'on regarde l'action de $\text{GL}(E)$ sur $\mathcal{F}$. Soit maintenant $(F_1, \dots, F_q) \in \mathcal{F}$ tel que $\dim E_i = \dim F_i$. On considère $\mathcal{B}$ (resp $\mathcal{B}'$) une base adaptée à $(E_1, \dots, E_q)$ (resp une base adaptée à $(F_1, \dots, F_q)$). Soit u_i défini par $u_i(\mathcal{B}_i) = \mathcal{B}'_i$ et u défini par $u|_{E_i} = u_i$. Alors $u \in \text{GL}(E)$ et $(u(E_1), \dots, u(E_q)) = (F_1, \dots, F_q)$. Ainsi, l'ensemble des représentants $\mathcal{R}$ des orbites est l'ensemble $\{(m_1, \dots, m_q) \in \mathbb{N}^q \mid m_1 + \dots + m_q = n\}$.

Décrivons maintenant le stabilisateur de ε . On a

$$\begin{aligned} \text{Stab}(\varepsilon) &= \{u \in \text{GL}(E) \mid u(E_i) = E_i\} \\ &= \{u \in \text{GL}(E) \mid u|_{E_i} \in \text{GL}(E_i)\} \\ &\simeq \prod_{i=1}^q \text{GL}(E_i) \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient par l'équation au classe

$$|\mathcal{D}(E)| = |\mathcal{F}| = \sum_{\varepsilon \in \mathcal{R}} \frac{|\text{GL}(E)|}{|\text{Stab}(\varepsilon)|} = \sum_{\substack{(m_1, \dots, m_q) \in \mathbb{N}^q \\ m_1 + \dots + m_q = n}} \frac{|\text{GL}_n(\mathbb{F}_q)|}{\prod_{i=1}^q |\text{GL}_{m_i}(\mathbb{F}_q)|}$$

3 Bibliographie

Tout est en le Rombaldi, page 148.