Probabilité que 2 nombres aléatoires soient premiers entre eux

Théorème : On tire aléatoirement 2 nombres entre $[\![1;n]\!]$ suivant une loi uniforme. La probabilité qu'ils soient premiers entre eux vaut
$\mathbb{P}_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \mu(k) E\left(\frac{n}{k}\right)^2$ où μ est la fonction de Möbius

Lemme : Si $(U_i)_{i \leq k}$ sont des ensembles finis, alors
$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{k} U_i\right) = \sum_{\emptyset \neq I \subset [\![1;k]\!]} (-1)^{\mathrm{card}(I)+1} \mathrm{Card}\left(\bigcap_{i\in I} U_i\right)$$

Preuve : 1) Posons, $A_n = \{(a,b) \in [\![1;n]\!]^2,\ a \wedge b = 1\}$.
$\mathbb{P}_n = \frac{\mathrm{card}(A_n)}{n^2}$. Soient $p_1 \cdots p_k$ les nombres premiers inférieurs à n.
et $U_i = \{(a,b) \in [\![1;n]\!]^2 \ /\ p_i | a \text{ et } p_i | b\}$.
Alors $A_n = [\![1;n]\!]^2 \setminus \left[\bigcup_{i=1}^{k} U_i\right]$.

2) Si $\emptyset \neq I \subset [\![1;k]\!]$ alors $\left[\bigcap_{i\in I} U_i\right]$ est l'ensemble des couples (a,b) tels que $\prod_{i\in I} p_i | a$ et $\prod_{i\in I} p_i | b$.
Il y a donc $E\left(\frac{n}{\prod_{i\in I} p_i}\right)$ nombres multiples de $\prod_{i\in I} p_i$ et inférieurs à n.

Donc $\mathrm{Card}\left(\bigcap_{i\in I} U_i\right) = E\left(\frac{n}{\prod_{i\in I} p_i}\right)^2$.

Par le lemme, $\mathrm{Card}(A_n) = n^2 - \sum_{\emptyset \neq I \subset [\![1;k]\!]} (-1)^{\mathrm{card}\, I + 1} E\left(\frac{n}{\prod_{i\in I} p_i}\right)^2$.

3) $$\mathrm{Card}(A_n) = \mu(1) n^2 + \sum_{\substack{k = \prod_{i\in I} p_i \\ I \neq \emptyset \\ I \subset [\![1;k]\!]}} \mu(k) E\left(\frac{n}{k}\right)^2 + \underbrace{\sum_{\substack{k \in [\![1;n]\!] \\ k \text{ admet} \\ \text{un diviseur carré}}} \mu(k) E\left(\frac{n}{k}\right)^2}_{=0}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mu(k) E\left(\frac{n}{k}\right)^2$$

Donc $\mathbb{P}_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \mu(k) E\left(\frac{n}{k}\right)^2$

$\boxed{\text{Théorème : } \lim_{n\to\infty} P_n = \frac{6}{\pi^2}}$

Lemme : $\sum_{d|n} \mu(d) = 1$ si $n = 1$ $= 0$ si $n \geq 2$.

1) $\left| P_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)}{k^2} \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} \mu(k) \left[\frac{1}{n^2} E\left(\frac{n}{k}\right)^2 - \frac{1}{k^2} \right] \right|$

Or, $E\left(\frac{n}{k}\right) > \frac{n}{k} - 1$.

Donc $\frac{1}{n^2} E\left(\frac{n}{k}\right)^2 - \frac{1}{k^2} > \frac{1}{n^2}\left[\frac{n^2}{k^2} - \frac{2n}{k} + 1\right] - \frac{1}{k^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{2}{kn}$.

Et $\frac{1}{n^2} E\left(\frac{n}{k}\right)^2 - \frac{1}{k^2} \leq 0$.

Donc $\left| P_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)}{k^2} \right| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{kn} - \frac{1}{n^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{kn} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2\ln(n)}{n}$.

Donc $\lim_{n\to\infty} P_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^2}$.

2) Calculons $\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^2}\right) \times \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}\right) = X$

Les deux séries étant sommables, la série double l'est aussi. Donc

$X = \sum_{m,k} \frac{\mu(k)}{k^2 m^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p \text{ multiple de } k} \frac{\mu(k)}{p^2}$.

$= \sum_{p=1}^{\infty} \left[\sum_{k|p} \mu(k)\right] \times \frac{1}{p^2} \underset{\text{Lemme}}{=} 1$.

Donc $\lim_{n\to\infty} P_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}} = \frac{6}{\pi^2}$.