Fonction ζ et nombres premiers : Gourdon p. 302 — ~~121~~ - 230 - 264 - 265 - 266

Rombaldi p. 301 exo

Soit $\mathcal{P} = \{$nombre premiers$\}$

Alors $\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p}$ diverge.

démonstration : 1) $\zeta :]1,\infty[\to \mathbb{R}$, $s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ est C^∞ sur $]1,\infty[$.

Soit $a > 1$; alors $\exists h > 0 \,/\, a = 1 + 2h$

* $\forall n \geq 1$, $f_n : s \mapsto \frac{1}{n^s}$ est C^∞ sur $]1,\infty[$ et $f_n^{(p)}(s) = (-1)^p \frac{\ln(n)^p}{n^s}$

* $s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ converge simplement vers ζ sur $]1,\infty[$

* $\left| (-1)^p \frac{\ln(n)^p}{n^s} \right| = \frac{\ln(n)^p}{n^s} \leq \frac{\ln(n)^p}{n^a} = \frac{\ln(n)^p}{n^h} \times \frac{1}{n^{1+h}} = o\left(\frac{1}{n^{1+h}}\right)$

$\forall s \in [a,\infty[$.

donc $\sum (-1)^p \frac{\ln(n)^p}{n^s}$ converge normalement (donc uniformément) sur $[a,\infty[$, $\forall a > 1$ donc $\zeta \in C^\infty(]1,\infty[)$.

1

2) $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1)$ quand $s \to 1^+$

Par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]1,\infty[$, $\forall n \geq 1$ et $\forall s > 1$, on a :

$\frac{1}{(n+1)^s} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^s}\,dt \leq \frac{1}{n^s}$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^s} \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^s}\,dt \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$

donc $\zeta(s) - 1 \leq \frac{1}{s-1} \leq \zeta(s)$ donc $\frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq 1 + \frac{1}{s-1}$

donc $1 \leq (s-1)\zeta(s) \leq s$, avec $1 \to 1$ et $s \to 1$ quand $s \to 1^+$

donc $\zeta(s) \underset{s\to 1^+}{\sim} \frac{1}{s-1}$

$\forall s > 1$, $\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left[\frac{1}{n^s} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^s}\right]}_{u_n(s)}$

$\forall s \in [1,2]$, $0 \leq u_n(s) \leq \frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} = \int_n^{n+1} \frac{s}{t^{s+1}}\,dt \leq 2\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^2}$

donc $\sum u_n$ converge normalement sur $[1,2]$ donc sa somme est continue sur $[1,2]$ donc aussi en 1^+

Donc $\lim\limits_{s\to 1^+} \zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k(1) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k} - (\ln(k+1) - \ln(k))\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) = \gamma$$

3) Pour $s>1$, on considère $P_s(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{n^s}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

On note $A_n = \{k \times n,\ k \in \mathbb{N}^*\}$

Alors $P_s(A_n) = P_s\left(\bigsqcup_{k=1}^{+\infty} \{k.n\}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} P_s(\{kn\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{(kn)^s} = \frac{1}{n^s}$

Montrons que $(A_p)_{p\in\mathcal{P}}$ est indépendante

Soient $p_1 < \dots < p_r \in \mathcal{P}$, comme les p_k sont premiers entre eux :

$P_s\left(\bigcap_{k=1}^{r} A_k\right) = P_s(\text{multiples de } p_1, \dots, p_r) = P_s\left(\text{multiple de } \prod_{k=1}^{r} p_k\right)$

$$= P_s\left(A_{\prod_{k=1}^{r} p_k}\right) = \frac{1}{\left(\prod_{k=1}^{r} p_k\right)^s} = \prod_{k=1}^{r} \frac{1}{(p_k)^s} = \prod_{k=1}^{r} P_s(A_{p_k})$$

4) Comme 1 n'est ~~divisible par aucun nombre premier~~ le multiple d'aucun nombre premier, alors

$\{1\} = \bigcap_{p\in\mathcal{P}} (\Omega \setminus A_p)$ (2)

donc $P_s(\{1\}) = P_s\left(\bigcap_{p\in\mathcal{P}} (\Omega\setminus A_p)\right) = \prod_{p\in\mathcal{P}} (1 - P_s(A_p)) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$

Or $P_s(\{1\}) = \frac{1}{\zeta(s)}$ donc $\zeta(s) = \frac{1}{\prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)}$

où (p_n) est la suite des nb premiers rangés par ordre croissant (3)

5) Supposons par l'absurde que $\sum \frac{1}{p_n}$ converge. Alors $\ln\left[\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}\right] \sim \frac{1}{p_n}$

$\Rightarrow \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}$ converge vers une valeur l (4)

donc $\zeta(s) = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^s}} \leq \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}} = l$ $\forall s > 1$

donc ζ est majorée sur $]1, \infty[$, ce qui est impossible car $\zeta(s) \underset{s\to 1^+}{\sim} \frac{1}{s-1}$ ∎

(1) Gourdon p. 211 $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

Comme $\sum \frac{1}{n}$ diverge et que $\frac{1}{n} > 0$; $\ln(1+\frac{1}{n})$ alors

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}_{H_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)}_{\ln(k+1)-\ln(k)} = \ln(n+1)$$

donc $H_n \sim \ln(n)$

Soit $U_n = H_n - \ln(n)$

Alors $U_n - U_{n-1} = H_n - \ln(n) - H_{n-1} + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{2n^2}$

donc $\sum_n U_n - U_{n-1}$ CV

Et $\sum_{k=2}^{n} (U_k - U_{k-1}) = U_n - U_1$ alors (U_n) CV et on note γ sa limite de sorte que $H_n = \ln(n) + U_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$

(2) $A_p = \{\text{multiple de } p\}$; $\Omega \setminus A_p = \{\text{non multiple de } p\}$

$\forall p \in \mathcal{P}$, 1 n'est pas un multiple de p donc $\{1\} = \bigcap_{p\in\mathcal{P}} (\Omega \setminus A_p)$

(3) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \dots + x^n + o(x^n)$

$\frac{d}{dx} \ln(1-x) = \frac{-1}{1-x}$

$\ln(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} + o(x^n)\right)$

$\ln(1+x) = x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} + o(x^n)$

Ici : $\ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_n}}\right) = \ln(1) - \ln\left(1-\frac{1}{p_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p_n}$

(4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{1}{1-1/p_n}\right) = \ln\left(\prod_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{1-1/p_n}\right) = \ell$

donc $\prod_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{1-1/p_n} = e^{\ell} < +\infty$.