leçons :
151 : Dimension d'un ev. Rang.
157 : trigonalisables - nilpotents
150 : actions de groupe sur espaces de matrice.

Réduction de Jordan d'un endomorphisme nilpotent

(un peu long avec l'unicité) 48

Références :
. Caldero - Germoni "Histoires hédonistes de groupes et de géométries"
. Gourdon

Thm : $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n.
Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note $J_p = \begin{pmatrix} 0 & & (0) \\ 1 & \ddots & \\ (0) & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent.
Alors il existe une unique suite décroissante d'entiers $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_s$ telle que $\underset{bc}{\mathrm{mat}}(u)$ soit semblable à $\begin{pmatrix} \boxed{J_{p_1}} & & (0) \\ & \boxed{J_{p_2}} & \\ (0) & & \ddots \ \boxed{J_{p_s}} \end{pmatrix}$. Autrement dit, il existe une bijection de l'ensemble des partitions de n sur l'ensemble des orbites de $\mathcal{N}$ sous l'action de $GL(E)$ par conjugaison.

preuve : Soit $r \in \mathbb{N}^*$ l'indice de nilpotence de u. Le cas $r=1$ est évident, OPS $r \geq 2$
On note $F_i = \operatorname{Ker} u^i$

- **Existence :**

① lemme : $\{0\} \subsetneq F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \cdots \subsetneq F_r = E$
et $\forall i \in [\![1,r]\!] \quad u(F_i) \subset F_{i-1}$

preuve du lemme : les inclusions larges sont claires.
Si il existe $i \in [\![0,r-1]\!]$ tq $F_i = F_{i+1}$, alors $F_{i+2} = F_{i+1}$
(si $x \in F_{i+2}$, $u^{i+2}(x) = 0$ donc $u^{i+1}(u(x)) = 0$ donc $u^i(u(x)) = 0$ donc $x \in F_{i+1}$)
On en déduit par récurrence que $F_i = F_r$, contradiction avec la minimalité de r.
Donc $\forall i \in [\![0,r-1]\!] \quad F_i \subsetneq F_{i+1}$
Soit $i \in [\![1,r]\!]$ et $x \in F_i$. $u^{i-1}(u(x)) = u^i(x) = 0$ donc $u(x) \in F_{i-1}$

② On se donne G_r un supplémentaire de F_{r-1} dans F_r $\quad (F_r = F_{r-1} \oplus G_r)$
On a (1) $u(G_r) \subset u(F_r) \subset F_{r-1}$ d'après ①
(2) $u_{|G_r} : G_r \to F_{r-1}$ est injective
(3) $G_r \neq \{0\}$ d'après ①
(4) $u(G_r) \cap F_{r-2} = \{0\}$

preuve de (2) : $\operatorname{Ker}(u_{|G_r}) = \operatorname{Ker} u \cap G_r = F_1 \cap G_r \subset F_{r-1} \cap G_r = \{0\}$
preuve de (4) : Soit $x \in u(G_r) \cap F_{r-2}$.
Soit $y \in G_r$ tq $u(y) = x$, on a $u^{r-2}(x) = u^{r-1}(y) = 0$ donc $y \in F_{r-1}$
d'où $y = 0$ et $x = u(y) = u(0) = 0$

Soit H_{r-1} un supplémentaire de $u(G_r) \oplus F_{r-2}$ dans F_{r-1}
On pose $G_{r-1} = H_{r-1} \oplus u(G_r)$, on a $F_{r-1} = F_{r-2} \oplus G_{r-1}$

③ Par un raisonnement identique et par récurrence descendante, on construit $(G_i)_{1\leq i\leq n}$, $(H_i)_{1\leq i\leq n-1}$ des sev de E tq
$$\begin{cases} F_i = G_i \oplus F_{i-1} & \forall i\in [\![1,n]\!] \\ G_i = u(G_{i+1})\oplus H_i & \forall i\in[\![1,n-1]\!] \\ u_{|G_{i+1}} : G_{i+1}\to G_i \text{ est injective} & \forall i\in[\![1,n-1]\!]\end{cases}$$

$\forall i\in[\![1,n]\!]$ $G_i\neq\{0\}$ donc $\boxed{E=\bigoplus_{1\leq i\leq n} G_i}$

④ On construit une base adaptée (en utilisant le fait que $u_{|G_{i+1}}$ est injective $\forall i$)

G_n	$e_{n,1}$ ... e_{n,s_n}			
G_{n-1}	$u(e_{n,1})$ ... $u(e_{n,s_n})$	$e_{n-1,1}$ ... $e_{n-1,s_{n-1}}$		
$\vdots$				
G_1	$u^{n-1}(e_{n,1})$ ... $u^{n-1}(e_{n,s_n})$	$u^{n-2}(e_{n-1,1})$ ... $u^{n-2}(e_{n-1,s_{n-1}})$	...	$e_{1,1}$ ... e_{1,s_1}

La famille $(e_{n,1}, u(e_{n,1}),..,u^{n-1}(e_{n,1}), e_{n,2}, u(e_{n,2}),.., u^{n-1}(e_{n,2}),...)$ est une base de E. (lire le tableau par colonnes, de haut en bas). Dans cette base, la matrice de u a la forme voulue avec
$$\begin{cases} p_1=p_2=\dots=p_{s_n}=n=p_i & \forall i\in[\![1,s_n]\!] \\ p_{s_n+i}=n-1 & \forall i\in[\![1,s_{n-1}]\!] \\ p_{s_n+s_{n-1}+i}=n-2 & \forall i\in[\![1,s_{n-2}]\!] \\ \vdots \\ p_{s_n+\dots+s_2+i}=1 & \forall i\in[\![1,s_1]\!]\end{cases}$$

• <u>Unicité</u>: Supposons que $\operatorname{mat}_{bc}(u)$ soit semblable $\begin{pmatrix} J_{p_1} & & (0) \\ & J_{p_2} & \\ (0) & & J_{p_s}\end{pmatrix}$ avec $p_1\geq p_2\geq\dots\geq p_s$.

On note n_i le nombre de blocs de Jordan de taille i
$m_i=\dim(\operatorname{Ker} u^i)$

On a alors
$$\begin{cases} m_1 = n_1+n_2+\dots+n_n \\ m_2 = n_1+2n_2+\dots+2n_n \\ m_3 = n_1+2n_2+3n_3+\dots+3n_n \\ \vdots \\ m_{n-1} = n_1+2n_2+3n_3+\dots+(n-1)n_{n-1}+(n-1)n_n \\ m_n = n_1+2n_2+\dots+n\,n_n\end{cases}$$
(n est l'indice de nilpotence de u)

et ce système linéaire est de Cramer (la matrice $\begin{pmatrix}1 & \cdots & \cdots & 1\\ 1 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3\dots & n\end{pmatrix}$ est inversible)

Donc les n_i sont entièrement déterminés par u et il en est de même pour les p_i □