Stirling et répartition des nombres premiers

Nicolas Fabiano

Juillet 2022

Ce développement est constitué de 4 modules, qui peuvent être combinés de différentes manières en fonction de la leçon choisie et de la vitesse de présentation.

Le module (W) consiste en l'étude de l'intégrale de Wallis. Très classique, il s'inscrit bien dans les leçons 223, 226, 236, 239 et 265.

Le module (S) consiste en l'étude asymptotique de $n!$. Classique, il s'inscrit bien dans les leçons 223, 230, et plus discutablement 226. Il est plutôt court comparé aux trois autres.

Les modules (O) et (Ω) consistent en montrer respectivement que le nombre de nombres premiers est un O ou un Ω [1] de $n \ln n$. Originaux, ils s'inscrivent bien dans les leçons 121, 223, et plus discutablement 123, 126 et 190. Ce raisonnement est attribué à Gauss.

Chacun de (W) et (S) permet de démontrer que $\ln \binom{n}{n/2} \sim n \ln(2)$, ce qui sert de lemme dans (O) et (Ω).

De manière cohérente, il est possible de présenter :
- (W) et (S) pour montrer la formule de Stirling : $n! \sim \frac{n^n}{e^n}\sqrt{n\pi}$;
- (W) ou (S) comme lemme préliminaire pour (O) ou (Ω) ;
- (O) et (Ω) en utilisant Stirling comme lemme sans le démontrer.

Module (W) : Intégrale de Wallis

Ce module démontre $\binom{2p}{p} \sim \frac{2^{2p}}{\sqrt{p\pi}}$.

On pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt$.

On a

$$W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} t \sin t dt = \int_0^{\pi/2} (n+1)\sin^n t \cos^2 t dt = (n+1)(W_n - W_{n+2})$$

donc $\frac{W_{n+2}}{W_n} = \frac{n+1}{n+2}$.

Avec $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$, on déduit par récurrence immédiate $W_{2p} = \frac{\pi}{2}\frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} = \frac{\pi}{2^{2p+1}}\binom{2p}{p}$ et $W_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} = \frac{2^{2p}}{2p+1}/\binom{2p}{p}$.

Par ailleurs, $W_n \geq W_{n+1} \geq W_{n+2} \sim W_n$, donc $W_n \sim W_{n+1}$.

Ainsi, $\binom{2p}{p}^2 \sim \frac{2^{4p}}{p\pi}$.

Module (S) : Etude de suite

Ce module démontre que $u_n := \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$ admet une limite finie.

On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1)(1+1/n)^n e^{-1}\sqrt{1+1/n}/(n+1) = (1+1/n)^{n+1/2}e^{-1}$$

$$\log\frac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1/2)\log(1+1/n) - 1 = (n+1/2)(1/n - 1/2n^2 + O(1/n^3) - 1 = O(1/n^2)$$

Donc $(\log \frac{u_{n+1}}{u_n})$ sommable donc $\log u_n$ admet une limite finie donc u_n aussi.

1. Ω est une notation principalement utilisée en informatique, qui est l'inverse d'un O : $f = O(g)$ ssi $g = \Omega(f)$.

Module (O) : Il y a peu de nombres premiers

Ce module démontre que $\pi(n) \preceq 2\ln(2)n/\ln(n)$ (avec $\preceq$ la clôture transitive de $\leq$ et $\sim$), en utilisant comme lemme que $\ln\binom{n}{n/2} \sim n\ln(2)$.

NB : ce module est technique à mener à bien, (Ω) est préférable en cas de doute.

On a

$$\prod_{n/2<p\leq n} p \leq \binom{n}{n/2}$$

$$(n/2)^{\pi(n)-\pi(n/2)} \leq \binom{n}{n/2}$$

$$\pi(n) - \pi(n/2) \leq \ln(n/2)\ln\binom{n}{n/2} \sim n\ln(n)\ln(2)$$

$$\pi(n) \preceq \ln(2)\sum_{k=0}^{\ln n} n/2^k \ln(n/2^k)$$

La partie technique est alors de montrer que

$$\sum_{k=0}^{\ln n} n/2^k \ln(n/2^k) \sim 2n/\ln(n)$$

Si vous n'êtes pas capable de l'improviser par vous-même, choisir ce module semble une mauvaise idée, c'est donc laissé en exercice.

Module (Ω) : Il y a beaucoup de nombres premiers

Ce module démontre que $\pi(n) \succeq \ln(2)n/\ln(n)$ (avec $\succeq$ la clôture transitive de $\geq$ et $\sim$), en utilisant comme lemme que $\ln\binom{n}{n/2} \sim n\ln(2)$, mais également le lemme classique suivant (formule de Legendre) : $v_p(n!) = \sum_{k=0}^{\lfloor \log_p(n)\rfloor} \lfloor n/p^k \rfloor$.

Idée de la preuve de la formule de Legendre : le nombre de multiples de p^k entre 1 et n vaut $\lfloor n/p^k \rfloor$. Les détails de rédaction varient d'une source à l'autre, vous êtes invité à trouver votre préférée.

On a

$$v_p(\binom{n}{n/2}) = \sum_{k=0}^{\lfloor \log_p(n)\rfloor} \lfloor n/p^k \rfloor - 2\lfloor n/2p^k \rfloor \leq \log_p(n)$$

$$n^{\pi(n)} = \prod_{p\leq n} p^{\log_p(n)} \geq \binom{n}{n/2}$$

$$\pi(n) \succeq \ln\binom{n}{n/2}/\ln(n) \sim \ln(2)n/\ln(n)$$

Complément au module (O)

En admettant que $\pi(n) \sim \gamma\frac{n}{\ln n}$, on peut raffiner le premier raisonnement pour obtenir $\gamma = 1$. En effet, on peut plutôt prendre $\pi(n) - \pi(n/2) + \pi(n/3) - \pi(n/4)$, ou même la même chose avec plus de termes. Asymptotiquement, on obtient précisément la série de $\ln(2)$, qui se simplifie avec celui provenant du lemme.

Cette partie me semble trop technique pour être raisonnablement présentée à l'oral autrement qu'en l'expliquant rapidement avec les mains comme ci-dessus. Mais, dans ce cas, vous êtes invité à vérifier que vous sauriez rédiger de vous-même les détails en cas de demande.