

Courbure de noeuds et théorème de Fary-Milnor

Nicolas Fabiano

Juillet 2022

Ce développement très original est constitué de 3 modules, qui peuvent être combinés de différentes manières en fonction de la leçon choisie et de la vitesse de présentation.

Le module (A) consiste en la preuve que la courbure d'une courbe C^2 est la limite de ses interpolations affines par morceaux. Il s'inscrit bien dans les leçons 209, 235, 267 et plus discutablement 228.

Le module (P) consiste en la preuve, pour une courbe affine par morceaux, que sa courbure est égale à la moyenne des courbures de ses projetés, pour une répartition uniforme des directions de projection. Il s'inscrit bien dans les leçons 235, 236 et 267.

Le module (M) consiste en la preuve que le projeté d'un noeud non trivial a une courbure au minimum 4π . Il s'inscrit bien dans les leçons 236, 267 et plus discutablement 204.

Mis bout à bout, on aboutit au théorème de Fary-Milnor : la courbure d'un noeud non trivial est au moins 4π . Néanmoins, ce développement est trop long, il est donc conseillé de ne détailler que les modules (A) et (P) ou bien (P) et (M), voire un seul module parmi (A) ou (M) (le module (P) est trop court, à moins de développer la remarque 2 de manière conséquente).

De manière générale, ce développement nécessite de faire de nombreux dessins, il est recommandé de les réaliser soi-même et à s'entraîner à les reproduire au fil du raisonnement.

Ce développement est librement inspiré de l'article de Istan FARY : Sur la courbure totale d'une courbe gauche faisant un noeud ; Bulletin de la S. M. F., tome 77 (1949), p. 128-138 (NB : ce n'est pas un livre à proprement parler)

Module (A) : Limite de courbure

La courbure est ici définie comme suit :

- pour une courbe C^2 , la courbure en un point est la limite des inverses des rayons de courbure, et la courbure totale est l'intégrale de la courbure ponctuelle ;
- pour une courbe affine par morceau la courbure en chaque cassure est l'angle de cette dernière ($= 0$ pour une cassure effaçable et $= \pi$ pour un demi-tour) et la courbure totale est la somme des courbures aux cassures ;
- on peut combiner ces définitions pour une courbe C^2 par morceaux, mais cela rendrait la preuve plus technique.

On considère une suite d'interpolations affines par morceaux telle que la limite du max des distances entre deux points consécutifs tend vers 0. (de manière analogue à, par exemple, la définition de l'intégrale de Riemann)

Ce module démontre que la courbure d'une courbe C^2 est la limite de ses interpolations.

Pour t un point qui à l'étape n est sur un segment de longueur L_0 , entourés de segments de longueurs L_- et L_+ avec des angles θ_- et θ_+ , on pose $f_n(t) = \frac{\theta_-}{L_-+L_0} + \frac{\theta_+}{L_++L_0}$. (pour des raisons de lourdeur, on omet les indice n des angles et longueurs)

L'intégrale de f_n donne la courbure de l'approximation affine à l'étape n , car chaque angle θ est divisé par les longueurs des segments l'avoisinant et est justement intégré sur ces segments.

Montrons que f_n converge simplement vers la courbure, en montrant que chacun de $\frac{\theta_-}{L_-+L_0}$ et $\frac{\theta_+}{L_++L_0}$ tend vers sa moitié.

On considère le cercle passant par les 3 points définissant θ_- , donc le rayon ρ_n tend vers le rayon de courbure ρ .

Par le théorème d'angle inscrit-angle au centre, θ_- vaut la moitié de l'angle au centre, dont le sinus vaut $\frac{L_-+L_0}{\rho_n}$.

Donc $\frac{1}{\rho_n} = \frac{\sin(2\theta_-)}{L_-+L_0}$.

Pour conclure, reste à remarquer que $\theta_- \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, ce qui permet d'écrire $\sin(2\theta_-) \sim 2\theta_-$, et à uniformiser les approximations pour utiliser un théorème de convergence. Les détails de cette partie sont techniques,

et dépendent de l'énoncé précis qui sert à définir la courbure, qui doit être suffisamment fort et notamment inclure une notion d'uniformité provenant du théorème de Heine.

Module (P) : Moyenne des courbures des projections

Dans ce module, on note $\widehat{a, b}$ l'angle entre les vecteurs a et b . Il s'agit du supplémentaire de l'angle utilisé dans la définition de la courbure, qui est plus commode à manipuler ici.

Ce module démontre que, en notant a_n et b_n les projections de a et b sur le plan normal à n , on a $\widehat{a, b} = \frac{1}{4\pi} \iint_S \widehat{a_n, b_n} d\omega(n)$ avec ω uniforme.

L'intégrale ne dépend que de $\widehat{a, b}$, car on peut effectuer un changement de variable sur n qui fait simplement tourner la sphère et donc qui laisse ω invariant. On la note plutôt $f(\theta)$, que l'on veut montrer égale à l'identité.

Pour des angles entre 0 et π , on a $f(\theta_1) + f(\theta_2) = f(\theta_1 + \theta_2)$. En effet, on peut réaliser le tout avec des vecteurs coplanaires, et on a alors pour tout n que $\widehat{a_n, c_n} = \widehat{a_n, b_n} + \widehat{b_n, c_n}$.

Comme de plus f est croissante et que $f(\pi) = \pi$, f est bien l'identité sur $[0, \pi]$.

Remarque 1 : $\widehat{a_n, b_n}$ n'est pas toujours défini, car on pourrait avoir n colinéaire à a ou b et donc l'un des vecteurs qui s'annule. Néanmoins, si a et b sont non nuls, l'ensemble des tels vecteurs n est négligeable, cela ne pose donc pas de problème dans l'intégrale.

Remarque 2 : cette preuve est analogue à la preuve géométrique que $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$, car on rassemble les termes symétriquement pour obtenir des sommes faciles à calculer. A méditer.

Module (M) : Courbure d'un projeté non trivial

Dans ce module, on suppose que la projection est propre, au sens où chaque point est au plus double et les points doubles sont isolés. Le fait que presque toute projection d'un noeud affine par morceaux est propre pourra être admis, car ne présente pas de difficulté particulière (contrairement au cas général d'un noeud C^2 par morceaux).

On montre alors que, en supposant le noeud non trivial (ie non isotope à un cercle), sa projection est de courbure au moins 4π .

Comme chaque sommet est de degré pair, on peut bicolorier les faces, c'est à dire les colorier en noir et blanc de sorte que deux faces partageant une côté soient de couleur différente. Disons que la cc (composante connexe) infinie est blanche, montrons qu'il existe une autre cc blanche.

Pour cela, on commence par éliminer récursivement les cc noires constituées d'une simple boucle, avec comme leur voisine la cc blanche infinie et un seul sommet. Chaque élimination diminue la courbure, on peut donc se ramener au cas où aucune telle élimination n'est possible. Comme le noeud est non trivial, on ne s'est pas ramené à un cercle.

On forme alors une chaîne de cc noires en longeant la cc infinie, qui peut toujours être continuée car on a éliminé les boucles et le cas du cercle. Comme il y a un nombre fini de cc, cette chaîne boucle, et elle enserme alors une cc blanche.

On fixe alors un point O de cette cc blanche. Il vérifie que toute demi-droite issue coupe la courbe en au moins 2 points (ou un point double), et on peut choisir O de sorte à éviter toute colinéarité.

Pour un noeud affine par morceaux $(A_0, A_1, \dots, A_n = A_0)$, on pose alors $\gamma_k = \widehat{A_{k-1}OA_k}$, $\theta_k = \widehat{A_{k-1}A_kA_{k+1}}$ et $x_k = \widehat{OA_kA_{k+1}}$.

D'une part, $\sum_k \gamma_k \geq 4\pi$. En effet, cela revient à intégrer $|\gamma'|$ le long du chemin, mais on peut aussi calculer cette intégrale direction par direction et chacune compte au moins double grâce au choix de O .

D'autre part, $\theta_k \geq x_{k-1} + \gamma_k - x_k$. Pour justifier cette égalité, il faudrait normalement faire un dessin pour chacun des 4 cas en fonction des positions relatives des points. Il est conseillé de ne faire que celui pour lequel on a l'égalité (par exemple, A_{k-1} , A_k et A_{k+1} cocycliques dans cet ordre sur un même quart de cercle et O pas loin du centre du cercle fonctionne), et de passer rapidement sur les autres.

D'où $\sum_k \theta_k \geq 4\pi$, ce qui est précisément le résultat voulu.