leçons : 220 EDO $X' = f(t, X)$
214 Thm inv. locale, Thm fc° implicites
215 applicat° diff sur ouvert de $\mathbb{R}^n$
203 notion de compacité
204 connexité

Théorème de Hadamard-Levy

(à apprendre par coeur, long) 7

Références
Z-Q mais c'est mal fait donc plutôt maison.

Théorème : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^2$.

(i) f $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$

$\iff$

(ii) f propre et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ $Df(x)$ inversible

preuve : (ii) $\Rightarrow$ (i)

1 Analyse du problème, annonce du squelette de la preuve

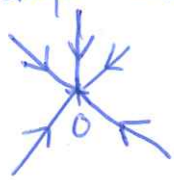
Il suffit de prouver que f est bijective, le théorème d'inversion globale permettra alors de conclure à (i). Il suffit de prouver : $\exists!\, x \in \mathbb{R}^n$ $f(x) = 0$ et appliquer ce résultat à $f - y$ qui vérifie encore (ii), pour $y \in \mathbb{R}^n$, pour avoir la bijectivité.

$$X(x) = Df(x)^{-1}(Y(f(x))) = -Df(x)^{-1}(f(x))$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "X"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "Y"] \\ \mathbb{R}^n & \mathbb{R}^n \arrow[l, "Df^{-1}"] \end{tikzcd}$$

ne pas faire ce diagramme, car il est faux

$Y(y) = -y$ champ de vecteurs dont chaque solution converge vers 0



X tiré en arrière de Y par f, X $\underline{\underline{\mathcal{C}^1}}$

On note $\varphi_t(x) = \varphi_x(t) = \varphi(t, x)$ le flot associé à X, défini sur $U = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} I_x \times \{x\}$
I_x intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, maximal (application de Cauchy-Lipschitz local car X $\mathcal{C}^1$)

On pose, pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $W_{x_0} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi_x(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} x_0\}$ (il faudra montrer que cet ensemble est bien défini)

On va montrer que $\mathbb{R}^n = \coprod_{x_0 \in f^{-1}(\{0\})} W_{x_0}$ et que W_{x_0} est ouvert si $x_0 \in f^{-1}(\{0\})$.

Par connexité de $\mathbb{R}^n$, ceci prouvera que $\# f^{-1}(\{0\}) = 1$

2 Calcul préliminaire

On pose $g_x(t) = f(\varphi_x(t))$ pour $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in I_x$

En dérivant, on trouve $g_x'(t) = -g_x(t)$ d'où $g_x(t) = f(x)e^{-t}$

D'où $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^n \times I_x$ $\boxed{f(\varphi_x(t)) = f(x)e^{-t}}$ (*)

③ $\forall x \in \mathbb{R}^n\ [0,+\infty[\subset I_x$: Soit $x \in \mathbb{R}^n$

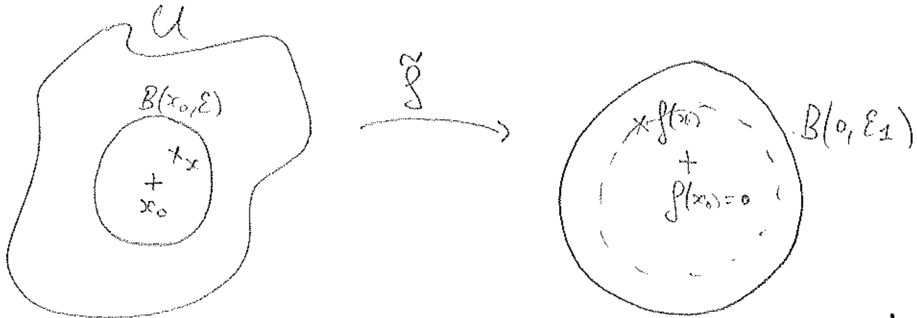
$\forall t \in [0,+\infty[\cap I_x \quad \varphi_x(t) \in f^{-1}\left(B'(0,\|f(x)\|)\right)$ compact car f propre

Par le lemme de sortie de tout compact : φ_x définie sur $[0,+\infty[$

④ Soit $x \in \mathbb{R}^n$. φ_x reste dans un compact sur $[0,+\infty[$ donc il existe $t_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$ telle que $\varphi_x(t_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} x_0 \in \mathbb{R}^n$. Par (*) et par continuité de f : $f(x_0)=0$

lemme : x_0 est localement asymptotiquement stable

preuve du lemme : $Df(x_0)$ est inversible, on applique le thm d'inversion locale



$\tilde f = f_{|U}^{|B(0,\varepsilon_1)}$

$\tilde f$ C^1-difféo

(*) $\forall t \geq 0 \ \forall x \in B(x_0,\varepsilon) \qquad f(\varphi_x(t)) = f(x)e^{-t}$

$\|f(\varphi_x(t))\| = \|f(x)\|e^{-t}$ est décroissant donc $\forall t \geq 0 \ \varphi_x(t) \in U$

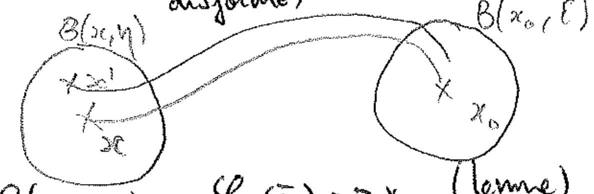
On peut donc inverser (*) : $\forall t \geq 0 \qquad \varphi_x(t) = \tilde f^{-1}(f(x)e^{-t}) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \tilde f^{-1}(0) = x_0$ □

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $\exists t_k \to +\infty \ \ \varphi_x(t_k) \to x_0 \in f^{-1}(\{0\})$

$\exists k \in \mathbb{N} \qquad \varphi_x(t_k) \in B(x_0,\varepsilon)$ (comme dans le lemme)

$\forall t \geq t_k \quad \varphi_x(t) = \varphi_t(x) = \varphi_{t-t_k}(\varphi_{t_k}(x)) \xrightarrow[t\to+\infty]{} x_0$ (lemme)

On vient de montrer que $\mathbb{R}^n = \coprod_{x_0 \in f^{-1}(\{0\})} W_{x_0}$ (c'est clairement une union disjointe)



⑤ W_{x_0} ouvert :

Soit $x \in W_{x_0}$. $\varphi_t(x) \xrightarrow[t\to+\infty]{} x_0$

Soit $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\bar x \in B(x_0,\varepsilon)$ $\varphi_t(\bar x) \xrightarrow[t\to+\infty]{} x_0$ (lemme)

$\exists t_1 \in [0,+\infty[\qquad \varphi_{t_1}(x) \in B\left(x_0,\frac{\varepsilon}{2}\right)$

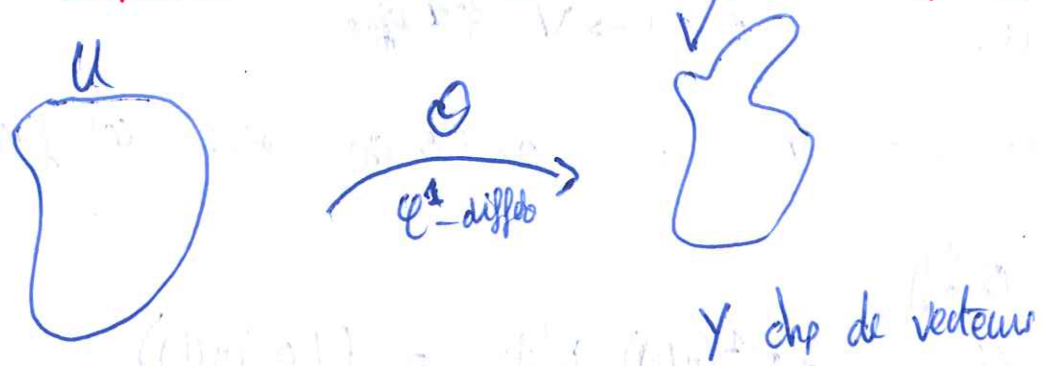
Par continuité du flot : $\exists \eta > 0 \ \forall x' \in B(x,\eta) \ \forall t \in [0,t_1] \ \|\varphi_t(x) - \varphi_t(x')\| < \frac{\varepsilon}{2}$

Soit $x' \in B(x,\eta)$

$\forall t \geq t_1 \qquad \varphi_t(x') = \varphi_{t-t_1}\big(\underbrace{\varphi_{t_1}(x')}_{\in B(x_0,\varepsilon)}\big) \xrightarrow[t\to+\infty]{} x_0$. D'où W_{x_0} ouvert □

⑥ $\mathbb{R}^n$ est connexe donc $\# f^{-1}(\{0\}) = 1$ □

Complément sur le tiré en arrière d'un chp de vecteurs



Déf : X tiré en arrière de Y par θ

$$\forall x \in U \qquad X(x) = d\theta^{-1}(\theta(x)) \cdot Y(\theta(x))$$
$$= d\theta(x)^{-1} \cdot Y(\theta(x))$$

Prop : $x : I \to U$

x solution de $\begin{cases} x' = X(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \iff \theta(x)$ solution de $\begin{cases} y' = Y(y) \\ y(t_0) = \theta(x_0) \end{cases}$

preuve :

$$\forall t \in I \qquad \theta(x)'(t) = d\theta(x(t)) \cdot x'(t)$$

Si x soluto : $\quad \forall t \in I \quad (\theta \circ x)'(t) = d\theta(x(t)) \cdot X(x(t))$

$$= d\theta(x(t)) \cdot d\theta(x(t))^{-1} \cdot Y(\theta(x(t)))$$

Si $\theta(x)$ solution : $\quad \forall t \in I \quad Y((\theta \circ x)(t)) = d\theta(x(t)) \cdot x'(t)$

$$\forall t \in I \qquad d\theta(x(t))^{-1} \cdot Y(\theta \circ x(t)) = x'(t)$$

$$\forall t \in I \qquad X(x(t)) = x'(t)$$

$x' = f(x)$ sur U $\qquad \theta : U \to V$ C^1 difféo

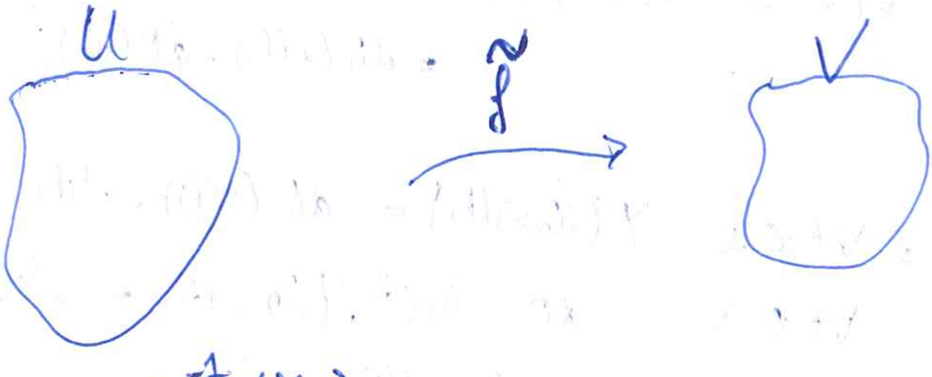
Quelle équation sur V pour que $\varphi = \theta^{-1}(y)$ vérifie $\varphi' = f(\varphi)$?

$$\varphi = \theta^{-1} \circ y$$

$$\varphi' = \underbrace{d\theta^{-1}(y(t)) \cdot y'(t)}_{= d\theta(\theta^{-1}(y(t)))^{-1} \cdot y'(t)} = f(\theta^{-1}(y(t)))$$

$$y'(t) = d\theta(\theta^{-1}(y(t))) \cdot f(\theta^{-1}(y(t)))$$

$$Y(y) = d\theta(\theta^{-1}(y)) \cdot f(\theta^{-1}(y))$$



$$X(x) = -Df(x)^{-1} \cdot (f(x))$$

$$Y(y) = d\tilde{f}(\tilde{f}^{-1}(y)) \cdot X(\tilde{f}^{-1}(y))$$

$$= -d\tilde{f}(\tilde{f}^{-1}(y)) \cdot D\tilde{f}(\tilde{f}^{-1}(y))^{-1} \cdot \tilde{f}(\tilde{f}^{-1}(y))$$

$$= -y$$

Applications
Hadamard – Levy

$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}^n \quad \forall L \in GL_n(\mathbb{R}) \qquad \|a\| < \varepsilon$ et $\|L - Id\| < \varepsilon \Rightarrow \exists f$ difféo de $\mathbb{R}^n$

tq $\quad \forall \|x\| < 1 \quad f(x) = Lx + a$

$\forall \|x\| > 2 \quad f(x) = x$

ie la restriction à la boule unité d'un isom affine assez proche de l'identité se prolonge en un difféo de $\mathbb{R}^n$ égal à l'identité hors de la boule de rayon 2.

preuve : g f C^∞ plateau d'une variable $\quad g \equiv 1 \quad \forall |t| < 1$
$\qquad g \equiv 0 \quad \forall |t| > 2$

On pose $f(x) = x + g(\|x\|^2)(Lx + a - x)$

- <u>f propre</u> : $\quad K$ cpt

$f^{-1}(K) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \in K\}$

$f^{-1}(K)$ fermé ok, $\quad f^{-1}(K) \subset B(0,2) \cup K$ borné

- <u>$Df(x)$ inversible $\forall x$</u> : $\quad$ Pour $\|x\| < 1 \quad f(x) = Lx + a \quad Df(x) = L$ inversible pour $\varepsilon < 1$

Pour $\|x\| > 2 \quad f(x) = x$ ok

Pour $1 \leq \|x\| \leq 2$: $\quad Df(x)\cdot h = h + g(\|x\|^2)(Lh - h) + 2\langle x, h\rangle g'(\|x\|^2)(Lx + a - x)$

A majorant de $|g'|$: $\quad \|Df(x) - Id\| \leq \|L - I\| + 4A(\|a\| + \|L - I\|) = (1 + 4A)\underbrace{\|L - I\|}_{< \varepsilon} + 4A\underbrace{\|a\|}_{< \varepsilon}$