leçons : 201 : Espaces de fc°
202 : Ex de parties denses.
234 : Espaces L^p, $1 \leq p \leq +\infty$
235 : Suites et séries de fonctions intégrables
240 : Produit de convolution, transformat° de Fourier.
241 : Suites et séries de fc°
239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre

Densité de $D(\mathbb{R}^n)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$

3

Références :
Rudin "Analyse réelle et complexe"
Faraut "Calcul intégral"

Prérequis :
(i) Inégalité de Jensen
(ii) Théorème de Fubini-Tonelli
(iii) pour $p \in [1,+\infty[$, $\tau : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to L^p(\mathbb{R}^n) \\ y \mapsto \tau_y f : x \mapsto f(x+y) \end{cases}$ est continue.

Théorème : Soit $p \in [1,+\infty[$. Alors l'espace $D(\mathbb{R}^n)$ des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

preuve :

① Réduction au cas où f est à support compact :

$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ donc $f \mathbb{1}_{B(0,k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{L^p} f$ par convergence dominée

Dans la suite $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et est à support compact

② Construction de l'approximation de l'identité :

On pose $\Psi : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}} & \text{si } x \in B(0,1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$ $\qquad \Psi \in D(\mathbb{R}^n)$

On pose $\varphi = \dfrac{\Psi}{\int_{\mathbb{R}^n} \Psi}$ et $\forall k \geq 1$ $\varphi_k : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto k^n \varphi(kx) \end{array}$

(φ_k) est une approximation de l'identité. $\mathcal{C}^\infty$ à support compact.

③ MQ $\|f * \varphi_k - f\|_p^p \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$

$\forall k \geq 1\ \forall x \in \mathbb{R}^n$
$$|(f*\varphi_k)(x) - f(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\varphi_k(y)\,dy - f(x)\right|$$
$$= \left|\int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x))\,\varphi_k(y)\,dy\right|$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|\,\varphi_k(y)\,dy$$

La mesure de Lebesgue multipliée par φ_k est une mesure de proba donc par l'inégalité de Jensen appliquée à la fonction convexe $u \in [0,+\infty[\mapsto u^p$, on a :
$$|(f*\varphi_k)(x) - f(x)|^p \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p \varphi_k(y)\,dy$$

Par le théorème de Fubini-Tonelli : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |f*\varphi_k(x) - f(x)|^p\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p\,dx\right)\varphi_k(y)\,dy$

d'où $\|f * \varphi_k - f\|_p^p \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \|\tau_{-y} f - f\|_p^p \, \varphi_k(y)\, dy$

Il suffit donc de mq $\int_{\mathbb{R}^n} \|\tau_{-y} f - f\|_p^p \, \varphi_k(y)\, dy \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

④ Soit $\varepsilon > 0$.

- $\begin{cases} \mathbb{R}^n \to L^p \\ x \mapsto \tau_x f \end{cases}$ est continue donc $\exists \eta > 0 \ \forall y \in BF(0,\eta) \ \|\tau_{-y} f - f\|_p^p \leqslant \varepsilon$

- (φ_k) est une approximation de l'unité donc $\exists N \in \mathbb{N} \ \forall k \geqslant N \ \int_{\|y\| > \eta} \varphi_k(y)\, dy \leqslant \varepsilon$

Pour $k \geqslant N$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|\tau_{-y} f - f\|_p^p \, \varphi_k(y)\, dy = \int_{\|y\| \leqslant \eta} \|\tau_{-y} f - f\|_p^p \, \varphi_k(y)\, dy + \int_{\|y\| > \eta} \|\tau_{-y} f - f\|_p^p \, \varphi_k(y)\, dy$$

$$\leqslant \varepsilon \underbrace{\int_{\|y\| \leqslant \eta} \varphi_k(y)\, dy}_{\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(y) dy = 1} + 2^p \|f\|_p^p \underbrace{\int_{\|y\| > \eta} \varphi_k(y)\, dy}_{\leqslant \varepsilon}$$

$$\leqslant \varepsilon (1 + 2^p \|f\|_p^p)$$

D'où le résultat car $f * \varphi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

Compléments sur $L^p(\mathbb{R}^d)$, $p<+\infty$

Thm : $\mathcal{C}^0_c(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $(L^p(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_p)$

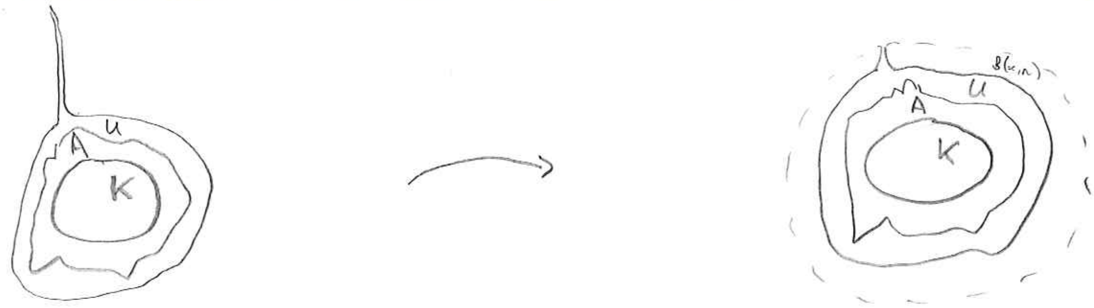
preuve :

① Soit A un borélien borné et soit $\varepsilon>0$.
On va approcher $\mathbb{1}_A$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Par <u>régularité</u> de la mesure de Lebesgue, il existe un compact K et un ouvert $\mathcal{U}$ tels que $K\subset A\subset \mathcal{U}$ et $\lambda(\mathcal{U}\setminus K)\leq\varepsilon$.

On pose $f:\begin{cases}\mathbb{R}^d \longrightarrow [0,1]\\ x\longmapsto \dfrac{d(x,\mathbb{R}^d\setminus\mathcal{U})}{d(x,K)+d(x,\mathbb{R}^d\setminus\mathcal{U})}\end{cases}$

Quitte à restreindre $\mathcal{U}$ à une boule ouverte, ops $\mathcal{U}$ borné et $f\in\mathcal{C}^0_c$



$\forall x\in K \quad f(x)=1=\mathbb{1}_A(x)$

$\forall x\in\mathbb{R}^d\setminus\mathcal{U} \quad f(x)=0=\mathbb{1}_A(x)$

$\forall x\in\mathcal{U}\setminus K \quad f(x)\in[0,1]$ et $\mathbb{1}_A(x)\in\{0,1\}$ donc $|f(x)-\mathbb{1}_A(x)|\leq 1$

D'où $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d}|\mathbb{1}_A(x)-f(x)|^p\,dx = \int_{\mathcal{U}\setminus K}|\mathbb{1}_A(x)-f(x)|^p\,dx \leq \lambda(\mathcal{U}\setminus K)\leq\varepsilon$

$\|\mathbb{1}_A - f\|_p^p\leq\varepsilon$ □

② Soit A un borélien quelconque de mesure fini (pour que $\mathbb{1}_A\in L^p(\mathbb{R}^d)$!)
Alors $\mathbb{1}_{A\cap B(0,k)}\xrightarrow{L^p}\mathbb{1}_A$ par convergence dominée.

③ Si $g\in L^p(\mathbb{R}^d)$ est de la forme $g=\sum_{i=1}^{\ell}a_i\mathbb{1}_{A_i}$, alors $\forall i$ $\lambda(A_i)<+\infty$
(si $a_i\neq0$ et les A_i sont 2 à 2 disjoints) et $g\in\overline{\mathcal{C}^0_c}$

④ Si $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ est positive :

$g^p \in L^1(\mathbb{R}^d)$ donc il existe une suite de fonctions simples positives s_n^p telle que $\int s_n^p \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int g^p$ et $s_n \longrightarrow g^p$ simplement en croissant

$$\int |g - s_n|^p \longrightarrow 0 \quad \text{par convergence dominée} \quad \left(|g - s_n|^p \leq |g|^p \right)$$

D'où $s_n \xrightarrow{L^p} g$

⑤ Si $g \in L^p$ est de signe quelconque, on écrit $g = g_+ - g_-$

avec $g_+ = \max(0, g) \geq 0$

$g_- = \max(0, -g) \geq 0$