Théorème de représentation conforme

Théorème : Tout domaine simplement connexe de $\mathbb{C}$ différent de $\mathbb{C}$ est biholomorphe au disque unité ouvert $\mathcal{U}$.

Démonstration : Soit Ω un domaine simplement connexe du plan, avec $\Omega \neq \mathbb{C}$. On note Σ l'ensemble des $\psi \in \mathcal{H}(\Omega)$ injectives envoyant Ω dans $\mathcal{U}$. Soit $w_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

* On va montrer que Σ est non vide.

Le caractère simplement connexe de Ω permet de fixer $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ tel que $\varphi(z)^2 = z - w_0$ pour tout $z \in \Omega$. Alors φ est injective, car si $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$, on a $\varphi(z_1)^2 = \varphi(z_2)^2$ donc $z_1 = z_2$. Comme l'image de φ est ouverte, il existe un disque $D(a,r)$ inclus dans $\varphi(\Omega)$, avec $0 < r < |a|$. On a alors $D(-a,r) \cap \varphi(\Omega) = \emptyset$, car si $\varphi(z_1) = -\varphi(z_2)$, on a $z_1 = z_2$, donc $\varphi(z_1) = 0$, ce qui est impossible car $z_1 \neq w_0$.

On pose alors $\psi : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{r}{\varphi(z)+a} \end{array}$. Pour tout $z \in \Omega$, on a $|\varphi(z)+a| > r$ car $\varphi(\Omega) \cap D(-a,r) = \emptyset$, donc $|\psi(z)| < 1$. Donc ψ envoie Ω dans $\mathcal{U}$.
L'injectivité de φ donnant celle de ψ, on a $\psi \in \Sigma$, donc $\Sigma \neq \emptyset$.

* Soit $\psi \in \Sigma$. On suppose que $\psi(\Omega) \neq \mathcal{U}$. On va construire $\psi_1 \in \Sigma$ telle que $|\psi_1'(z_0)| > |\psi'(z_0)|$, où $z_0 \in \Omega$ est fixé. Pour tout $\alpha \in \mathcal{U}$, on pose $\varphi_\alpha : \begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathcal{U} \\ z & \longmapsto & \dfrac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha} z} \end{array}$, qui est une bijection, de réciproque $\varphi_{-\alpha}$.

Soit $\alpha \in \mathcal{U} \setminus \psi(\Omega)$. Alors $\varphi_\alpha \circ \psi \in \Sigma$ et ne possède pas de zéro dans Ω, ce qui permet de fixer $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tel que $g^2 = \varphi_\alpha \circ \psi$. L'injectivité de g découle de celle de $\varphi_\alpha \circ \psi$, ce qui donne $g \in \Sigma$.

On pose alors $\beta = g(z_0)$, puis $\psi_1 = \varphi_\beta \circ g$. On a $\psi_1 \in \Sigma$. On note s la fonction carré. On a $\psi = \varphi_{-\alpha} \circ s \circ g = \underbrace{\varphi_{-\alpha} \circ s \circ \varphi_{-\beta}}_{=: F} \circ \psi_1$, et on remarque que $\psi_1(z_0) = 0$.

On a alors $\psi'(z_0) = \psi_1'(z_0)\, F' \circ \psi_1(z_0) = \psi_1'(z_0)\, F'(0)$.

Cependant, $F(U) \subset U$ et F n'est pas injective, donc $|F'(0)| < 1$ par lemme de Schwarz.

par 17.5 (cf Rudin), $|F'(0)| \leq 1 - |\psi(z_0)|^2 < 1$

Ceci donne $|\psi'(z_0)| < |\psi_1'(z_0)|$.

$*$ Soit $z_0 \in \Omega$. On pose $\eta = \sup\limits_{\psi \in \Sigma} |\psi'(z_0)|$. On va montrer qu'il existe $h \in \Sigma$ tel que $|h'(z_0)| = \eta$. On commence par fixer une suite (ψ_n) d'éléments de Σ telle que $|\psi_n'(z_0)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} \eta$. Comme $|\psi(z)| < 1$ pour tous $\psi \in \Sigma$ et $z \in \Omega$, la famille Σ est normale. On fixe alors une extraction σ telle que la suite $(\psi_{\sigma(n)})$ converge uniformément sur tout compact vers $h \in \mathcal{H}(\Omega)$.

On a $\psi_{\sigma(n)}(U) \subset U$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $h(U) \subset \overline{U}$. Mais h est d'image ouverte, donc $h(U) \subset U$. Il reste à montrer que h est injective.

Soient $z_1, z_2 \in \Omega$ distincts. On pose $\alpha = h(z_1)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = \psi_n(z_1)$.

Soit $\overline{D}$ un disque fermé de centre z_2 contenu dans Ω, tel que $z_1 \notin \overline{D}$ et $h - \alpha$ n'ait pas de zéro sur la frontière de $\overline{D}$, ce qui est possible car les zéros de $h - \alpha$ sont isolés. La suite $(\psi_n - \alpha_n)$ converge alors uniformément sur $\overline{D}$ vers $h - \alpha$. Comme ces fonctions sont injectives et ont un zéro en z_1, elles n'ont pas de zéro dans D. A partir d'un certain rang, $|(\psi_n - \alpha_n)(z) - (h - \alpha)(z)| < |(h-\alpha)(z)|$ sur D donc, par théorème de Rouché, $h - \alpha$ n'a pas de zéro dans D.

Ceci prouve l'injectivité de h, qui est donc dans Σ.

Le deuxième point permet d'affirmer qu'une telle application $h : \Omega \to \mathcal{U}$, qui est injective, envoie Ω sur $\mathcal{U}$, et est donc surjective. Il en résulte que h est un biholomorphisme, ce qui achève la preuve.