15 Conique passant par 5 points

Référence : Eiden, p.52-53

Théorème 15.1 *Par 5 points distincts A, B, C, D et E d'un plan affine $\mathcal{E}$ passe une conique. Elle est unique si et seulement si 4 points quelconques parmi ces 5 sont non alignés.*

Cette conique définie par 5 points est non dégénérée si et seulement si 3 points quelconques parmi ces 5 sont non alignés.

Preuve. Si les 5 points sont alignés, on peut prendre la droite et une autre droite quelconque, cela donne une infinité de coniques qui conviennent. Sinon, on peut supposer par exemple que A, B et C forment une base affine du plan. Notons (X, Y, Z) les coordonnées barycentriques dans cette base. L'équation d'une conique $\mathcal{C}$ passant par A, B et C (c'est-à-dire circonscrite au triangle ABC) est de la forme :

$$pYZ + qXZ + rXY = 0$$

En effet, les termes en X^2, Y^2 et Z^2 s'annulent si on impose que les points $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ et $C = (0, 0, 1)$ satisfassent l'équation.

Notons (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) des coordonnées barycentriques de D et E. La conique $\mathcal{C}$ passe par D et E si et seulement si

$$\begin{aligned} py_1z_1 + qz_1x_1 + rx_1y_1 = 0 \\ py_2z_2 + qz_2x_2 + rx_2y_2 = 0 \end{aligned}$$

Ce système est de rang ≤ 2, donc a toujours des solutions (p, q, r) non nulles (au moins une droite vectorielle de solution), d'où l'existence d'une conique dans tous les cas.

Il y a plusieurs coniques qui conviennent si et seulement si le système ci-dessus est de rang ≤ 1. C'est le cas exactement quand les déterminants extraits de taille 2 sont tous nuls.

Ces déterminants sont, au signe près,

$$z_1z_2 \begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & y_1 & y_2 \\ 1 & z_1 & z_2 \end{vmatrix}, \quad y_1y_2 \begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 \\ 1 & y_1 & y_2 \\ 0 & z_1 & z_2 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad x_1x_2 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & y_1 & y_2 \\ 0 & z_1 & z_2 \end{vmatrix}$$

Dans le cas général où D, E, ne figurent sur aucune des droites (AB), (BC) et (CA), c'est-à-dire quand $x_1y_1z_1x_2y_2z_2 \neq 0$, le système est de rang < 2 si et seulement si la droite (DE) contient A, B et C (les déterminants exprimant l'alignement de $D, E, A..$) ce qui est impossible puisque A, B, C forment une base affine.

Si le système est de rang < 2, et par exemple $D \in (AB)$ et les trois déterminants sont nuls ce qui donne pour les coordonnées : $z_1 = 0$, $x_1y_1 \neq 0$ et $y_1z_2 = 0$, c'est-à-dire $z_2 = 0$, donc E est aussi sur la droite (AB). On trouve donc 4 points alignés.

Réciproquement, si 4 points sont alignés, on a une infinité de coniques en prenant les unions de deux droites, dont l'une est fixée et l'autre doit seulement passer par un point. D'où le premier point du théorème.

Pour le second point, il faut revenir à la définition : une conique est non dégénérée si et seulement si la forme quadratique à 3 variables qui la définit en coordonnées barycentriques est non dégénérée.

Ecrivons la matrice de la forme quadratique :

$$\begin{pmatrix} 0 & r & q \\ r & 0 & p \\ q & p & 0 \end{pmatrix}$$

Son déterminant est pqr. On se place sous les hypothèses précédentes où la conique est définie de manière unique par les 5 points.

On peut alors dire que cette conique est non dégénérée si et seulement si $pqr = 0$.

Si $pqr = 0$, par exemple $p = 0$ et l'équation de la conique est $qXZ + rXY = 0$, c'est-à-dire $X(qZ + rY) = 0$ qui définit l'union de deux droites, sur lesquelles on ne peut placer 5 points sans que 3 parmi ces 5 soient alignés.

Réciproquement, si 3 points parmi les 5 sont alignés, alors la conique est l'union de deux droites (par unicité) qui est bien une conique dégénérée. En effet, son équation est de la forme $\varphi(X, Y, Z)\psi(X, Y, Z) = 0$ où φ est ψ sont deux formes linéaires. On écrit :

$$\varphi\psi = \frac{1}{4}((\varphi + \psi)^2 - (\varphi - \psi)^2)$$

ce qui montre que la forme quadratique $\varphi\psi$ est de rang ≤ 2. □

Théorème 15.2 *Deux coniques distinctes du plan affine s'intersectent en au plus* 4 *points ou alors elles contiennent une droite commune.*

Preuve.

Si elles s'intersectent en au moins 5 points, par l'unicité dans le théorème précédent, 4 points quelconques parmi ces 5 sont forcément alignés, donc ils sont tous alignés. Une conique passant par 3 points alignés contient la droite : en effet, si c'est la droite, on a gagné, sinon elle contient au moins deux points à l'extérieur, et on obtient ainsi 5 points qui définissent une unique conique d'après le théorème précédent, par unicité c'est l'union de deux droites. □

Remarque : On a supposé implicitement que le corps de base a une infinité d'éléments. On ne s'est pas intéressé aux coniques vide ou réduites à un point qui sont difficiles à définir par 5 points !

Leçons concernées : coniques, barycentres, déterminants, formes quadratiques, systèmes linéaires, utilisation de la dimension.