leçons :
106 : Groupe linéaire d'un ev de dimension finie, sous-groupes de $GL(E)$
156 : Exponentielle de matrices.
217 : Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$
214 : Thm inversion locale
Thm des fonctions implicites.

Théorème de Von Neumann

12

Références :
Jacques Faraut "Analyse sur les groupes de Lie"

Thm : Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit G un sous-groupe fermé de $Gl_n(\mathbb{K})$.
Alors G est une sous variété (réelle !) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

preuve : On supposera dans la preuve que G n'est pas discret.

① <u>lemme :</u> $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \left(\exp \frac{A}{n} \exp \frac{B}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \exp(A+B)$

preuve :

- $d(\exp)(0) = Id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ donc par le théorème d'inversion locale, il existe $\mathcal{O}_1$ voisinage de 0 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{O}_2$ voisinage de Id dans $Gl_n(\mathbb{K})$ tels que $\exp|_{\mathcal{O}_1} : \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. On note $f : \mathcal{O}_2 \to \mathcal{O}_1$ la réciproque.

mettre ce lemme dans le plan

On a $df(Id) = d\exp(0)^{-1} = Id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$

et $\exp \frac{A}{n} \exp \frac{B}{n} = Id + \frac{A+B}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

donc $f\left(\exp \frac{A}{n} \exp \frac{B}{n}\right) = \frac{A+B}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ (pour n assez grand)

D'où $\exp\left(n f\left(\exp \frac{A}{n} \exp \frac{B}{n}\right)\right) = \exp\left(A+B+o(1)\right) \to \exp(A+B)$ car $\exp$ $\mathcal{C}^0$

$$= \left(\exp f\left(\exp \frac{A}{n} \exp \frac{B}{n}\right)\right)^n = \left(\exp \frac{A}{n} \exp \frac{B}{n}\right)^n$$

② On pose $\mathfrak{g} = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \forall t \in \mathbb{R} \ \exp(tX) \in G\}$

D'après ① et parce que G est un sous-groupe fermé de $Gl_n(\mathbb{K})$, $\mathfrak{g}$ est un $\mathbb{R}$-sous-ev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

③ <u>lemme :</u> Soit $(h_k) \in G^{\mathbb{N}}$ telle que $h_k \to Id$ et $\forall k \geq 0 \ h_k \neq Id$.
Alors toute valeur d'adhérence ~~dans $\mathcal{M}_n$~~ de la suite $(u_k) = \left(\frac{f(h_k)}{\|f(h_k)\|}\right)$ est dans $\mathfrak{g}$.

preuve :

- La suite (h_k) converge vers Id donc (u_k) est bien définie à partir d'un certain rang.
- Soit $\alpha \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une valeur d'adhérence de (u_k), quitte à extraire on peut supposer que (u_k) est bien définie et que $u_k \to \alpha$.
- Soit $t \in \mathbb{R}$, on pose $a_k = E\left(\frac{t}{\|f(h_k)\|}\right)$ et $b_k = \frac{t}{\|f(h_k)\|} - a_k \in [0,1[$

$\forall k \geq 0 \quad \exp(t u_k) = \exp\left(a_k f(h_k) + b_k f(h_k)\right) = h_k^{a_k} \exp\left(b_k f(h_k)\right)$

(b_k) est bornée et $f(h_k) \to 0$ donc $\exp(b_k f(h_k)) \to Id$

Pour k assez grand : $\exp(t u_k) \exp(-b_k f(h_k)) = \underbrace{h_k^{a_k}}_{\in G}$

Donc $(h_k^{a_k})$ converge dans G. $k \to +\infty$: $\exp(t\alpha) \in G$. D'où $\alpha \in \mathfrak{g}$.

④ Lemme : Soit $\mathfrak{g}'$ un supplémentaire de $\mathfrak{g}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors il existe un voisinage U de 0 dans $\mathfrak{g}'$ tel que $\exp(U) \cap G = \{Id\}$

preuve : Supposons le contraire, alors $\forall k \geq 1 \quad (\exp(B_{\mathfrak{g}'}(0, \frac{1}{k})) \cap G) \setminus \{Id\} \neq \emptyset$

$\forall k \geq 1$, soit $h_k \in (\exp(B_{\mathfrak{g}'}(0, \frac{1}{k})) \cap G) \setminus \{Id\}$

$\forall k \geq 1$, soit $X_k \in B_{\mathfrak{g}'}(0, \frac{1}{k})$ tel que $\exp X_k = h_k$

Pour k assez grand : $\frac{f(h_k)}{\|f(h_k)\|} = \frac{X_k}{\|X_k\|} \in \mathfrak{g}'$ et par compacité de la Sphère unité dans $\mathfrak{g}'$, il existe α une valeur d'adhérence de la suite $\left(\frac{X_k}{\|X_k\|}\right)$

Par fermeture de $\mathfrak{g}'$: $\alpha \in \mathfrak{g}'$

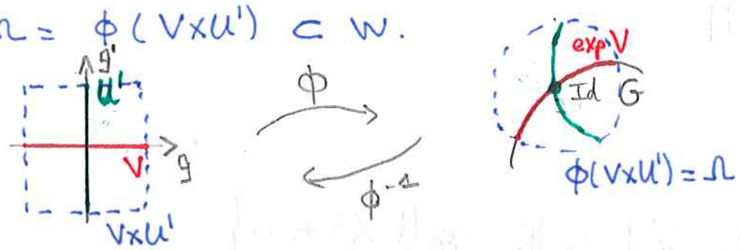
Par ③ : $\alpha \in \mathfrak{g}$

Donc : $\alpha = 0$. C'est absurde car $\|\alpha\| = 1$.

⑤ On pose $\phi : \begin{cases} \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}' \to GL_n(\mathbb{K}) \\ (X, X') \mapsto \exp X \exp X' \end{cases}$ ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$.

On a $d\phi(0,0) = id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ (car $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}' = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$)

Par le théorème d'inversion locale, il existe V un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$, V' un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}'$, W un voisinage de Id dans $GL_n(\mathbb{K})$ tels que $\phi_{|V \times V'} : V \times V' \to W$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. On pose $U' = V' \cap U$, alors $\phi_{|V \times U'}$ est un $\mathcal{C}^1$-difféo de $V \times U'$ sur $\Omega = \phi(V \times U') \subset W$.



MQ $\phi^{-1}(\Omega \cap G) = \phi^{-1}(\Omega) \cap \mathfrak{g} \times \{0\}$ ie $\exp V = \Omega \cap G$

- Par définition de $\mathfrak{g}$: $\exp V \subset G$

  Soit $X \in V$, $\phi(X, 0) = \exp X$ et $\phi(X, 0) \in \Omega$ donc $\exp V \subset \Omega$

- Soit $A \in \Omega \cap G$

  Soit $(X, X') \in V \times U'$ tq $A = \underbrace{\exp X}_{\in G} \exp X'$

  On a $\exp X' \in G$ et $X' \in U' \subset U$ donc $\exp X' = Id$

  D'où $A \in \exp V$.

⑥ On a construit une carte de G au voisinage de Id.

G est un groupe donc par translation, on obtient une carte au voisinage de tout point de G. Finalement, on a montré que G est une sous-variété réelle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.