

Théorème de Cartan et Von Neumann

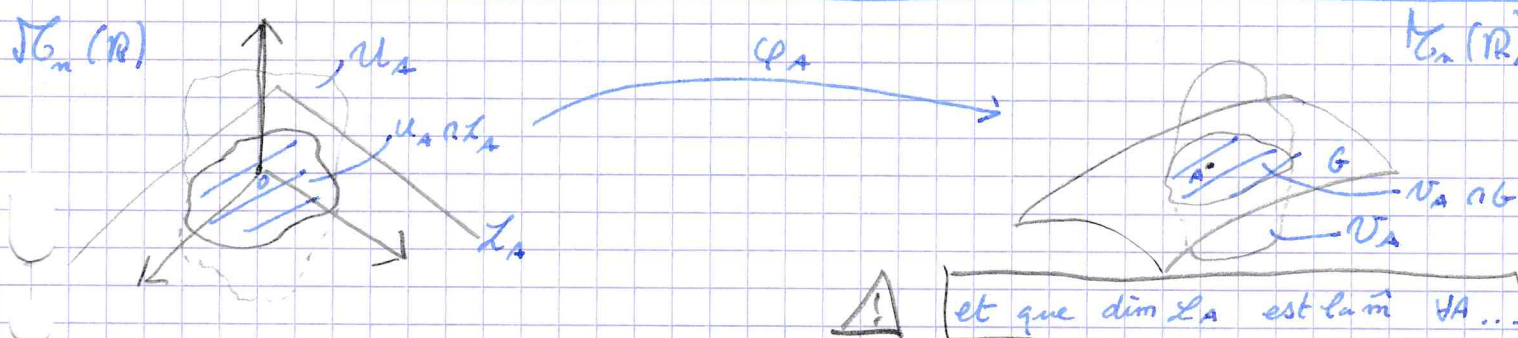
Un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et G un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$.

On veut montrer que G est localement difféo-morphe à un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'existence pour toute $A \in G$:

- un sev $\mathcal{L}_A$ de $M_n(\mathbb{R})$
- un voisinage ouvert $\mathcal{U}_A$ de O_n dans $M_n(\mathbb{R})$
- un voisinage ouvert $\mathcal{V}_A$ de A dans $M_n(\mathbb{R})$
- un difféo $\varphi_A : \mathcal{U}_A \rightarrow \mathcal{V}_A$ tel que :

$$\varphi_A(\mathcal{U}_A \cap \mathcal{L}_A) = G \cap \mathcal{V}_A \text{ et } \varphi_A(O_n) = A$$



① Réduction du problème.

Supposons que l'on ait $\mathcal{L}_{I_n}$, $\mathcal{U}_{I_n}$, $\mathcal{V}_{I_n}$ et φ_{I_n} , et soit $A \in G$.

Alors $\epsilon_A : \begin{cases} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ H & \longmapsto AH \end{cases}$

est un difféo (car $A \in GL_n(\mathbb{R})$), et $\epsilon_A(G) = G$.

et $\varphi_A = \epsilon_A \circ \varphi_{I_n} : \mathcal{U}_{I_n} \rightarrow \epsilon_A(\mathcal{V}_{I_n})$

convient comme difféo : $\epsilon_A(\mathcal{V}_{I_n})$ ouvert car ϵ_A difféo, et $\epsilon_A \circ \varphi_{I_n}(\mathcal{U}_{I_n} \cap \mathcal{L}_{I_n}) = \epsilon_A(G \cap \mathcal{V}_{I_n}) = \epsilon_A(G) \cap \epsilon_A(\mathcal{V}_{I_n}) = G \cap \epsilon_A(\mathcal{V}_{I_n})$.

On se restreint donc au point $I_n \in G$.
 (On a de plus $\forall A \in G : \dim Z_A = \dim Z_{I_n}$)

② Un sous-espace vectoriel digne d'intérêt

On définit $\mathcal{L} := \{ M \in M_n(\mathbb{R}) \mid \forall t \in \mathbb{R} : e^{tM} \in G \}$.
 (algèbre de Lie de G : $\mathfrak{g}$)

$O_n \in \mathcal{L}$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \forall M \in \mathcal{L} : \lambda M \in \mathcal{L}$
 donc vérifions que $\mathcal{L}$ est stable par somme.

On sait que $\exp : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ est différentiable
 en O_n et : $d\exp(O_n) = \text{id}_{M_n(\mathbb{R})}$ inversible
 donc d'après le TIL :

$$\exp : \tilde{U} \xrightarrow{\quad} \tilde{V} \quad \text{réalise un difféo}$$

$\in \mathcal{V}_0(O_n) \quad \in \mathcal{V}_0(I_n)$

d'inverse $L : \tilde{V} \xrightarrow{\quad} \tilde{U}$ tel que :

$$dL(I_n) = d\exp(O_n)^{-1} = \text{id}_{M_n(\mathbb{R})}$$

donc $\forall H \in M_n(\mathbb{R})$ tq $I_n + H \in \tilde{V}$:

$$L(I_n + H) = H + o(\|H\|) \quad \text{avec } \|H\| \rightarrow 0$$

Soient $A, B \in \mathcal{L}$ et $t \in \mathbb{R}$: $\exp e^{t(A+B)} \in G$
 on a : $\frac{t}{h} A, \frac{t}{h} B \xrightarrow{h \rightarrow +\infty} O_n$
 $A_h = e^{\frac{t}{h} A}, B_h = e^{\frac{t}{h} B} \xrightarrow{h \rightarrow +\infty} I_n$

donc $A_h B_h \xrightarrow{h \rightarrow +\infty} I_n$

car $\| \hat{A}_h - I_n \|, \| \hat{B}_h - I_n \| \leq \varepsilon \Rightarrow$
 $\| \hat{A}_h \hat{B}_h - I_n \| \leq \| \hat{A}_h \hat{B}_h - \hat{A}_h \| + \| \hat{A}_h - I_n \| \leq (1 + \| \hat{A}_h \|) \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$

donc APCR : $\begin{cases} \frac{t}{h} A, \frac{t}{h} B \in \tilde{U} \\ \hat{A}_h, \hat{B}_h \in \tilde{V} \end{cases}$

mais $A, B \in \mathcal{L} \Rightarrow \hat{A}_h, \hat{B}_h \in G \Rightarrow (\hat{A}_h \hat{B}_h)^h \in G$

$$\text{or } (\tilde{A}_h \tilde{B}_h)^h = (e^{L(\tilde{A}_h \tilde{B}_h)})^h = e^{h L(\tilde{A}_h \tilde{B}_h)}$$

$\downarrow$
 $\tilde{A}_h \tilde{B}_h \xrightarrow{L} L(\tilde{A}_h \tilde{B}_h)$

$\downarrow$
 $L(\tilde{A}_h \tilde{B}_h)$ commutative à elle-même

et comme $\frac{t}{h} A, \frac{t}{h} B \xrightarrow{h} 0_n$:

$$\tilde{A}_h = \exp \frac{t}{h} A = I_n + \frac{t}{h} A + o\left(\frac{\|A\|}{h}\right)$$

$h \rightarrow +\infty$

et de même pour $\tilde{B}_h$, d'où :

$$\tilde{A}_h \tilde{B}_h = I_n + \frac{t}{h} (A+B) + o\left(\frac{1}{h}\right)$$

$$\text{et } L(\tilde{A}_h \tilde{B}_h) = \frac{t}{h} (A+B) + o\left(\frac{1}{h}\right)$$

$$\text{donc } (\tilde{A}_h \tilde{B}_h)^h = e^{t(A+B) + o(1)} \xrightarrow{h \rightarrow +\infty} e^{t(A+B)}$$

par continuité de exp.

Or G fermé donc $e^{t(A+B)} \in G$

Donc $\mathcal{L}$ est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

③ Construction de φ

Soit $\mathcal{O}$ un supplémentaire de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{L} \oplus \mathcal{O}$$

et posons

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{L} \oplus \mathcal{O} & \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ L + F & \longmapsto e^L e^F \end{cases}$$

on a déjà : $\varphi(0_n) = I_n$

et $\forall H = H_{\mathcal{L}} + H_{\mathcal{O}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) :$

$$\begin{aligned} \varphi(H) &= (I_n + H_{\mathcal{L}} + o(\|H_{\mathcal{L}}\|)) (I_n + H_{\mathcal{O}} + o(\|H_{\mathcal{O}}\|)) \\ &= I_n + H + o(\|H_{\mathcal{L}}\| + \|H_{\mathcal{O}}\|) \end{aligned}$$

donc φ différentiable en 0_n et

$$d\varphi(0_n) = \text{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \text{ inversible}$$

TIL : $\varphi : \begin{matrix} \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathcal{V} \\ \in \mathcal{V}_0(0_n) & & \in \mathcal{V}_0(I_n) \end{matrix} \quad \text{difféo}$

et on a : $\varphi(\mathcal{U} \cap \mathcal{L}) = \varphi(\mathcal{L}) \cap \varphi(\mathcal{U}) \subset G \cap \mathcal{V}$

on veut $\boxed{=}$ Δ càd $\mathcal{V} \cap G \subset \overline{\varphi(\mathcal{L})}$

Supposons que $\forall W \subset U, W \in \mathcal{V}_0(O_n)$:

on n'ait pas $=$

càd: $\exists X = F + L \in W \setminus \mathcal{L}$ tq $\begin{cases} \varphi(X) \in G \\ F \neq 0 \end{cases}$

alors quitte à prendre une suite de voisinages $\{W_k\}_k$ emboîtés (décroissante) telle que $\bigcap W_k = \{0_n\}$,

il existe une suite $X_k = L_k + F_k \in W_k \setminus \mathcal{L}$
 tq $\varphi(X_k) \in G \quad \forall k$ (en part. $F_k \neq 0$)

alors $e^{F_k} = \underbrace{e^{-L_k}}_{\in \varphi(X_k) \in G} \underbrace{\varphi(X_k)}_{\in G} \in G \quad \forall k$

Or comme $\left(\frac{F_k}{\|F_k\|}\right)_k$ est bornée, quitte à en extraire une sous-suite, on a $\frac{F_k}{\|F_k\|} \rightarrow F \in \mathcal{O}$
 $\|F\| = 1$

Soit $t \in \mathbb{R}$, et soient $e_k \in \mathbb{Z}, b_k \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
 tels que $\frac{t}{\|F_k\|} = e_k + b_k$

Alors $e^{t \frac{F_k}{\|F_k\|}} = e^{(e_k + b_k) F_k} = e^{e_k F_k} e^{b_k F_k}$

or par continuité $e^{t \frac{F_k}{\|F_k\|}} \rightarrow e^{tF}$

et $F_k \rightarrow 0, |b_k| < \frac{1}{2} \Rightarrow e^{b_k F_k} \rightarrow I_n$
 $\Rightarrow e^{-b_k F_k} \rightarrow I_n$

donc $e^{e_k F_k} = e^{t \frac{F_k}{\|F_k\|}} e^{-b_k F_k} \xrightarrow{L \rightarrow A_k^{-1} = (d\varphi(A_k))^{-1} \circ \varphi} e^{tF}$
 $= (e^{F_k})^{e_k}$

donc, comme $e^{F_k} \in G: (e^{F_k})^{e_k} \in G$
 et G fermé $\Rightarrow e^{tF} \in G \quad \forall t$

Ainsi: $F \in \mathcal{L} \cap \mathcal{O}$

donc $F = 0$, absurde.

Conclusion: $\exists \overset{W_0}{(U)} \in \mathcal{V}_0(O_n), \varphi|_U: U \rightarrow V, \varphi(U \cap \mathcal{L}) = G \cap \mathcal{V}_0$