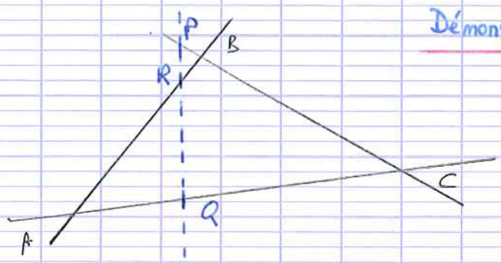
Théorèmes de Menelaus et Ceva.

Thm: (i) Menelaüs : Soit ABC un triangle non plat. Soient $P \in (BC)$, $Q \in (CA)$ et $R \in (AB)$, (P, Q et R) distincts des sommets. Alors P, Q et R sont alignés ssi
$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$

(ii) Ceva : Les droites (AP) (BQ) et (CR) sont concourantes ou parallèles ssi
$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1$.



Démonstration: Plaçons-nous dans le repère barycentrique défini par le triangle non plat ABC. Soient (X, Y, Z) les coordonnés d'un point M.

Lemme : Soit $M_1 \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}$ et $M_2 \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}$ deux points distincts du plan. Alors
$M \in (M_1 M_2) \iff \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0$. (E)

Preuve : • M_1 et M_2 vérifient évidemment (E).

• Cette équation équivaut à $\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} X + \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix} Y + \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} Z = 0$. Or, M_1 et M_2 sont distincts. La matrice $\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{pmatrix}$ est donc de rang 2 et au moins l'un de ses déterminants 2x2 extrait est non nul.
Donc l'un des 3 coefficients est non nul.

• Ils ne sont pas tous égaux car sinon, on aurait (E) qui vaudrait $X+Y+Z=0$ et ceci n'est pas possible car M_1 et M_2 vérifient (E).

(E) désigne bien l'équation d'un plan dont l'intersection avec le plan d'équation $X+Y+Z=1$ est une droite. ∴

• Menelaüs : Une équation barycentrique de la droite (BC) est $X=0$, i.e. $M \in (BC) \iff \exists \lambda / (1-\lambda)\overrightarrow{MB} + \lambda \overrightarrow{MC} = \vec{0}$, i.e. ssi ses coordonnées barycentriques sont de la forme $\begin{pmatrix} 0 \\ 1-\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$.
On a alors $\overrightarrow{BM} = \lambda(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC}) = \lambda \overrightarrow{BC}$.

D'où $\lambda = \dfrac{\overline{BM}}{\overline{BC}}$ et de même $1-\lambda = -\dfrac{\overline{CM}}{\overline{BC}}$.

Un triplet de coordonnées de M est donc $(0 ; -\overline{CM} ; \overline{BM})$.

Une équation de la droite (PQ) est donnée par $\begin{vmatrix} 0 & -\overline{CP} & \overline{BP} \\ \overline{CQ} & 0 & -\overline{AQ} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0$ (I) (cf. lemme)

et P, Q, R ont pour coordonnées barycentriques.

$P(0, -\overline{CP}, \overline{BP})$, $Q(\overline{CQ}, 0, -\overline{AQ})$ et $R(-\overline{BR}, \overline{AR}, 0)$

D'où le fait que P, Q et R soient alignés ssi $\begin{vmatrix} 0 & -\overline{CP} & \overline{BP} \\ \overline{CQ} & 0 & -\overline{AQ} \\ -\overline{BR} & \overline{AR} & 0 \end{vmatrix} = 0$

En développant le déterminant (par rapport à la 1ère colonne), on obtient

$$\overline{CP}\begin{vmatrix} \overline{CQ} & -\overline{AQ} \\ -\overline{BR} & 0 \end{vmatrix} + \overline{BP}\begin{vmatrix} \overline{CQ} & 0 \\ -\overline{BR} & \overline{AR} \end{vmatrix} = 0 \iff -\overline{AQ}\,\overline{BR}\,\overline{CP} + \overline{BP}\,\overline{CQ}\,\overline{AR} = 0$$

$$\iff \frac{\overline{CP}}{\overline{CQ}}\,\frac{\overline{BR}}{\overline{BP}}\,\frac{\overline{AQ}}{\overline{AR}} = 1.$$

. Ceva : De même, les droites (AP), (BQ) et (CR) ont pour équation

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\overline{CP} & \overline{BP} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0 \iff \overline{CP}\,Z + \overline{BP}\,Y = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \overline{CQ} & 0 & -\overline{AQ} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0 \iff \overline{AQ}\,X - \overline{CQ}\,Z = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\overline{BR} & \overline{AR} & 0 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0 \iff \overline{AR}\,X + \overline{BR}\,Y = 0$$

(Lemme du plan). Elles sont parallèles ou concourantes ssi $\begin{vmatrix} 0 & \overline{BP} & \overline{CP} \\ \overline{AQ} & 0 & -\overline{CQ} \\ \overline{AR} & \overline{BR} & 0 \end{vmatrix} = 0$

En développant le déterminant par rapport à la première ligne on obtient $\overline{BP}\begin{vmatrix} \overline{AQ} & -\overline{CQ} \\ \overline{AR} & 0 \end{vmatrix} + \overline{CP}\begin{vmatrix} \overline{AQ} & 0 \\ \overline{AR} & \overline{BR} \end{vmatrix} = 0 \iff \overline{AR}\,\overline{BP}\,\overline{CQ} + \overline{AQ}\,\overline{BR}\,\overline{CP} = 0$