Tables des caracères, sous-groupes distingués et simplicité

Lemme. *Soient G un groupe fini et χ un caractère de V. Alors*

$$K_\chi = \{g \in G, \chi(g) = \chi(1)\}$$

est un sous-groupe distingué de G.

Démonstration : soit (V, ρ) une représentation irréductible de G dont χ est le caractère. Nous allons montrer que $K_\chi = \operatorname{Ker} \rho$, qui et bien un sous-groupe distingué de G.

Si $g \in \operatorname{Ker} \rho$, alors $\rho(g) = \mathrm{Id}_V = \rho(1)$, donc $\chi(g) = \operatorname{tr} \rho(g) = \operatorname{tr} \rho(1) = \chi(1)$ et $g \in K_\chi$. Réciproquement, soit $g \in K_\chi$. On a $g^{|G|} = 1$ par théorème de Lagrange, donc $\rho(g)^{|G|} = \rho(g^{|G|}) = \mathrm{Id}_V$. Ainsi, $\rho(g)$ est annulé par le polynôme $X^{|G|} - 1$, qui est scindé sur $\mathbb{C}$ et à racines simples, donc $\rho(g)$ est diagonalisable. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres comptées avec multiplicité. Comme $g \in K_\chi$, on a $\operatorname{tr} \rho(g) = \operatorname{tr} \mathrm{Id}_V = n$. Or, les λ_i sont des racines de $X^{|G|} - 1$, c'est-à-dire des racines $|G|$-ièmes de l'unité, donc

$$n = |\operatorname{tr} \rho(g)| = \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| = \sum_{i=1}^{n} 1 = n.$$

Il y a égalité dans l'inégalité triangulaire, donc les λ_i sont positivement liés. Comme leur somme vaut n et qu'il sont de module 1, on a nécessairement $\lambda_i = 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Par suite, $\rho(g) = \mathrm{Id}_V$, c'est-à-dire $g \in \operatorname{Ker} \rho$. On a bien $K_\chi = \operatorname{Ker} \rho$. ■

Proposition. *Notons $\chi_1, \ldots, \chi_r$ les caractères irréductibles deux à deux non isomorphes de G. Alors H est un sous-groupe distingué de G si et seulement s'il existe $I \subset [\![1, r]\!]$ tel que*

$$H = \bigcap_{i \in I} K_{\chi_i}.$$

Démonstration : le lemme et le fait qu'une intersection de sous-groupes distingué est distinguée implique que les sous-groupes donnés sous cette forme sont bien distingués dans G. Réciproquement, soit H un sous-groupe distingué de G. Appelons $(V, \widetilde{\rho})$ la représentation régulière de G/H et posons $\rho = \widetilde{\rho} \circ \pi$, où $\pi \colon G \to G/H$ désigne la surjection canonique. Alors ρ définit une représentation de G sur V. Comme la représentation régulière est fidèle, $\widetilde{\rho}$ est injectif, donc $\operatorname{Ker} \rho = \operatorname{Ker}(\widetilde{\rho} \circ \pi) = H$; autrement dit $H = K_\chi$.

Décomposons la représentation $\tilde{\rho}$ en somme de représentations irréductibles : si χ désigne le caractère de ρ, on écrit

$$\chi = \sum_{i=1}^{r} m_i \chi_i,$$

avec $m_i \in \mathbb{N}$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$. Pour tout $g \in G$, on a

$$|\chi(g)| \leqslant \sum_{i=1}^{r} m_i |\chi_i(g)| \leqslant \sum_{i=1}^{r} m_i \chi_i(1) = \chi(1)$$

(la seconde inégalité provenant par exemple de la démonstration du lemme). Alors $g \in K_\chi$ si et seulement si ces inégalités sont des égalités. Cela équivaut à demander que $m_i\chi_i(g) = m_i\chi_i(1)$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, ce qui équivaut encore à demander que $g \in K_{\chi_i}$ dès que $m_i \neq 0$. Posons $I = \{i \in [\![1, r]\!], m_i \neq 0\}$. Alors on a

$$H = \bigcap_{i \in I} K_{\chi_i}$$

d'après tout ce qui précède. ■

Corollaire. *G est simple si et seulement si pour tout caractère χ irréductible non trivial de G et tout $g \in G \setminus \{1\}$, on a $\chi(g) \neq \chi(1)$.*

Démonstration : s'il existe χ irréductible non trivial et $g \in G \setminus \{1\}$ tel que $\chi(g) = \chi(1)$, alors K_χ est un sous-groupe distingué de G d'après le lemme, K_χ est distinct de $\{1\}$ car $g \neq 1$ et $g \in K_\chi$, et K_χ est distinct de G car χ n'est pas trivial. Donc G n'est pas simple.

Réciproquement, si G n'est pas simple, soit H un sous-groupe distingué non trivial de G et $g \in H \setminus \{1\}$. Écrivons

$$H = \bigcap_{i \in I} K_{\chi_i}$$

grâce à la proposition précédente. Comme H est distinct de G, il existe $i_0 \in I$ tel que χ_{i_0} n'est pas le caractère trivial. Alors $g \in K_{i_0}$, donc $\chi_{i_0}(g) = \chi_{i_0}(1)$. ■