L'oral à l'agrégation de mathématiques - Isenmann

Décomposition de Bruhat

101 150
105 162
106

Soit $\mathbb{K}$ corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, T_S l'ensemble des matrices triangulaires de $GL_n(\mathbb{K})$.

Définition : Un drapeau (complet) est une suite strictement croissante d'espaces vectoriels
$$\{0\} =: A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_n := E$$
On note $\mathcal{D}$ leur ensemble.

Proposition : Soit $f_1, \dots, f_n$ base de E.
Alors : $d = (F_0, \dots, F_n)$ avec $F_i = \mathrm{Vect}\{f_1, \dots, f_i\}$ est un drapeau de E.

Proposition : L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{D} \\ (c_1|\dots|c_n) & \mapsto & (\mathrm{Vect}\{c_1, \dots, c_i\})_{i=0}^{n} \end{array}$ est surjective.

Définition : Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ base canonique de E. On appelle drapeau canonique $\delta = \varphi(e)$.
On considère l'action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{D}$ définie :
$\forall d = (F_0, \dots, F_n) \in \mathcal{D}, \forall A \in GL_n(\mathbb{K}), A.d = (A(F_0), \dots, A(F_n))$.

Proposition : L'action est transitive et $\mathcal{D} \simeq GL_n(\mathbb{K}) / T_S$

Preuve :

- Soit $d = F_0, \dots, F_n \in \mathcal{D}$ et $\{e_i\}_{i=1}^n$ base canonique de E.
Par le théorème de la base incomplète, il existe une base $\{f_1, \dots, f_n\}$ de E telle que $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $F_i = \mathrm{Vect}\{f_1, \dots, f_i\}$. Soit $A = \mathrm{Mat}_{\{e_i\}}\{f_i\}$.
Puisque $\{f_1, \dots, f_n\}$ est une base, $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $A.\delta = d$.
Ainsi, l'action est transitive i.e. $\mathrm{Orb}(\delta) = \mathcal{D}$
- Par ailleurs, $A.\delta = \delta$ ssi $\forall i \in [\![1;n]\!], \mathrm{Vect}\{e_1, \dots, e_i\} = \mathrm{Vect}\{Ae_1, \dots, Ae_i\}$
ssi A est triangulaire supérieure
Ainsi, $\mathrm{Stab}(\delta) = T_S$ et alors $\mathcal{D} \simeq GL_n(\mathbb{K}) / T_S$

Théorème : (décomposition de Bruhat) Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$
Alors : $\exists T_1, T_2 \in T_S \mid \exists! \sigma \in S_n \mid A = T_1 P_\sigma T_2$

Preuve : oral

L'idée pour ce développement est de montrer l'existence d'une telle décomposition de manière similaire à l'algorithme de Gauss en omettant les matrices de permutation pour se limiter à des opérations dans T_S et de montrer l'unicité de la permutation σ par l'absurde.

Soit $(E_{i,j})_{i,j \in [\![1;n]\!]}$ base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Pour tout $i < j$ dans $[\![1;n]\!]$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\alpha \neq 0$ on définit :

- $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j} \in T_S$
- $D_i(\alpha) = I_n + (\alpha - 1) E_{i,i} \in T_S$

EXISTENCE

Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$
Soit $i_1 = \max\{k \in [\![1;n]\!] \mid a_{k,1} \neq 0\}$ (licite car $A \in GL_n(\mathbb{K})$)

- $\forall k < i_1$, on multiplie à gauche par :
$T_{k,i_1}\left(-\frac{a_{k,1}}{a_{i_1,1}}\right)$ $\quad L_k \leftarrow L_k - \frac{a_{k,1}}{a_{i_1,1}} L_{i_1}$
- On multiplie à gauche par :
$D_{i_1}\left(\frac{1}{a_{i_1,1}}\right)$ $\quad L_{i_1} \leftarrow \frac{1}{a_{i_1,1}} L_{i_1}$
- $\forall k \in [\![2;n]\!]$, on multiplie à droite par :
$T_{1,k}(-a_{i_1,k})$ $\quad C_k \leftarrow C_k - a_{i_1,k} C_1$

On itère ce processus aux autres colonnes et on construit alors une suite $(i_1, \dots, i_n)$ injective de $[\![1;n]\!]$ donc bijective. On note $\sigma \in S_n$ la permutation telle que $\forall k \in [\![1;n]\!], \sigma(k) = i_k$ et on lui associe la matrice de permutation P_σ.
On a ainsi, $P_\sigma = T_1 A T_2$ d'où l'existence.

UNICITÉ

Soit $A = T_1 P_\sigma T_2 = T_1' P_\tau T_2'$.
Alors : $P_\tau^{-1} \underbrace{(T_1')^{-1} T_1}_{T} P_\sigma = \underbrace{T_2' T_2^{-1}}_{T'}$
i.e. $P_{\tau^{-1}} \; T \; P_\sigma = T'$

Supposons par l'absurde que $\tau \neq \sigma$.
Ainsi, $\exists i \in [\![1;n]\!] \mid \sigma(i) < \tau(i)$
Alors :
$0 \neq T'_{i,i} = T_{\tau(i),\sigma(i)} = 0$
ABSURDE
Ainsi, $\sigma = \tau$.

$$\begin{array}{c} \sigma(i)\text{-ème colonne} \\ \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ T_{\sigma(i),\sigma(i)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 = T_{\tau(i),\sigma(i)} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Proposition : Le nombre d'orbites de l'action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ est $n!$.

Preuve :
L'action s'identifie à l'action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $GL_n(\mathbb{K})/T_S \times GL_n(\mathbb{K})/T_S$.

Soit $X, Y \in GL_n(\mathbb{K})$ et $T_1, T_2 \in T_S$, $\sigma \in S_n$ tel que :
$X^{-1} Y = T_1 P_\sigma T_2$.

Ainsi, $(\overline{X};\overline{Y}) = X(\overline{I_n};\overline{X^{-1}Y})$

$= X(\overline{I_n};\overline{T_1 P_\sigma T_2})$

$= X T_1(\overline{T_1^{-1}};\overline{P_\sigma T_2})$

$= X T_1(\overline{I_n};\overline{P_\sigma})$

Alors chaque orbite a un élément de la forme $(\overline{I_n};\overline{P_\sigma})$.

Montrons que σ est défini de manière unique.

Supposons par l'absurde qu'il existe $\sigma \neq \tau \in S_n$ tels que $\exists A \in GL_n(\mathbb{K}) \backslash (\overline{I_n};\overline{P_\sigma}) = A(\overline{I_n};\overline{P_\tau})$

Alors : $A \in T_S$ (car $\overline{A} = \overline{I_n}$) et $\exists T \in T_S \backslash P_\sigma T = A P_\tau$.

CONTREDIT l'unicité de la décomposition de Bruhat.

Il y a alors autant d'orbites que de permutations dans S_n : $n!$.

Temps :
14'34'' speechless
13'56'' speechless