Algèbre linéaire numérique
- Allaire

Critère de convergence pour les méthodes itératives

149 226
157
162

Lemme : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$

Alors : il existe une norme matricielle subordonnée $\|\cdot\|_{A,\varepsilon}$ telle que $\|A\|_{A,\varepsilon} \leq \rho(A) + \varepsilon$

Théorème : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $(M;N)$ une décomposition régulière de A et $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une méthode itérative basée sur $(M;N)$.

Alors : (x_k) converge ssi $\rho(M^{-1}N) < 1$

Preuve :

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $(e_k = x_k - x)_{k\in\mathbb{N}}$ l'erreur d'approximation de la méthode.

$$e_k = [M^{-1}Nx_{k-1} + M^{-1}b] - [M^{-1}Nx + M^{-1}b]$$
$$= M^{-1}N(x_{k-1} - x)$$
$$= M^{-1}N e_{k-1}$$

Ainsi, $e_k = (M^{-1}N)^k e_0$ et alors :

$e_k \xrightarrow[+\infty]{} 0$ ssi $\forall e_0 \in \mathbb{K}^n$, $\lim\limits_{+\infty} (M^{-1}N)^k e_0 = 0$

Montrons que : $\forall e_0 \in \mathbb{K}^n$, $\lim (M^{-1}N)^k e_0 = 0$ ssi $\rho(M^{-1}N) < 1$

$\Rightarrow$ Par contraposée : supposons que $\rho(M^{-1}N) \geq 1$.

Soit alors $\lambda \in Sp(M^{-1}N)$ telle que $\rho(M^{-1}N) = |\lambda|$ et $x \in \mathbb{K}^n$ un vecteur propre associé à λ unitaire.

Ainsi, $\|(M^{-1}N)^k x\| = |\lambda|^k \|x\| \geq 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

et alors on a trouvé $e_0 = x \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$\lim_{k\to+\infty} (M^{-1}N)^k e_0 \neq 0$$

$\Leftarrow$ Supposons $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\rho(M^{-1}N) + \varepsilon < 1$.

Par le lemme, il existe une norme subordonnée $\|\cdot\|_\varepsilon$ telle que : $\|M^{-1}N\|_\varepsilon \leq \rho(M^{-1}N) + \varepsilon < 1$

Soit alors $e_0 \in \mathbb{K}^n$. On a :

$$\|(M^{-1}N)^k e_0\| \leq \|M^{-1}N\|_\varepsilon^k \|e_0\| \xrightarrow[+\infty]{} 0$$

et $\lim\limits_{+\infty} (M^{-1}N)^k e_0 = 0$.

Lemme : Soit $\|\cdot\|$ norme matricielle subordonnée.

Alors : il existe $v \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ tel que :

$$\|A\| = \|Av\|$$

Théorème : Soit $A \in H_n^{++}(\mathbb{C})$, $(M;N)$ une décomposition régulière de A.

Alors : $(M^* + N) \in H_n(\mathbb{C})$.

Si de plus, $(M^* + N) \in H_n^{++}(\mathbb{C})$, alors $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Preuve :

① $(M^* + N)^* = M + N^*$
$= (A + N) + (M - A)^*$
$= A - A^* + M^* + N$
$= M^* + N$ $\quad (A \in H_n(\mathbb{C})$ donc $A = A^*)$

Ainsi, $(M^* + N) \in H_n(\mathbb{C})$.

② Supposons $(M^* + N) \in H_n^{++}(\mathbb{C})$

Soit la norme vectorielle : $\|x\|_A = \sqrt{\langle Ax; x\rangle}$

c'est bien une norme car $A \in H_n^{++}(\mathbb{C})$.

Soit $\|\cdot\|$ sa norme matricielle subordonnée.

Montrons que $\|M^{-1}N\| < 1$.

Par le lemme, $\exists v \in \mathbb{R}^n \setminus \|v\|_A = 1$ et telle que :

$$\|M^{-1}Nv\|_A^2 = \|M^{-1}N\|^2$$

Soit $w = M^{-1}Av$

$$\|M^{-1}Nv\|_A^2 = \langle AM^{-1}Nv ; M^{-1}Nv\rangle$$
$$= \langle AM^{-1}(M-A)v ; M^{-1}(M-A)v\rangle$$
$$= \langle Av - AM^{-1}Av ; v - M^{-1}Av\rangle$$
$$= \langle Av; v\rangle - \langle AM^{-1}Av; v\rangle - \langle Av; M^{-1}Av\rangle + \langle AM^{-1}Av ; M^{-1}Av\rangle$$
$$= \|v\|_A^2 - \langle M^{-1}Av ; MM^{-1}A^*v\rangle - \langle MM^{-1}Av; M^{-1}Av\rangle + \langle AM^{-1}Av ; M^{-1}Av\rangle$$
$$= \|v\|_A^2 - \langle w ; Mw\rangle - \langle Mw; w\rangle + \langle Aw; w\rangle$$
$$= 1 - \langle M^*w; w\rangle - \langle Nw; w\rangle$$
$$= 1 - \langle (M^* + N)w; w\rangle$$

Or : $\langle (M^* + N)w; w\rangle > 0$ car $(M^* + N) \in H_n^{++}(\mathbb{C})$ et $w \neq 0$.

Ainsi, $\|M^{-1}N\|_A^2 < 1$ et alors $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Lemme : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\varepsilon > 0$.

Alors : il existe une norme matricielle subordonnée $\|\cdot\|_{A,\varepsilon}$ telle que :
$\|A\|_{A,\varepsilon} \leq \rho(A) + \varepsilon$.

Preuve :

(Par le théorème de réduction des endomorphismes normaux sur $\mathbb{C}$,) NON ! Par le théorème de Schur.

$\exists U \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C}) \setminus T := UAU^{-1} = \begin{pmatrix} t_{1,1} & \cdots & t_{1,n} \\ & \ddots & \vdots \\ (0) & & t_{n,n} \end{pmatrix}$

Soit $\forall \delta > 0$, $D_\delta = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \delta & \\ & & \ddots \\ (0) & & & \delta^{n-1} \end{pmatrix}$ et

$T_\delta = (UD_\delta) A (UD_\delta)^{-1} = D_\delta A D_\delta^{-1}$

$= \begin{pmatrix} t_{1,1} & \delta t_{1,2} & \cdots & \delta^{n-1} t_{1,n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & & \delta t_{n-1,n} \\ (0) & & & t_{n,n} \end{pmatrix}$

Soit alors $\delta > 0$ tel que $\forall i \in [\![1; n-1]\!]$,
$\sum_{j=i+1}^{n} \delta^{j-i} |t_{i,j}| \leq \varepsilon$

Ainsi, $\|T_\delta\|_\infty \leq \rho(A) + \varepsilon$ et alors l'application $B \mapsto \|B\|_{A,\varepsilon} := \|(UD_\delta) B (UD_\delta)^{-1}\|_\infty$ est une norme subordonnée telle que : $\|A\|_{A,\varepsilon} \leq \rho(A) + \varepsilon$

Lemme : Soit $\|\cdot\|$ norme matricielle subordonnée

Alors : $\exists v \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\} \setminus \|A\| = \|Ax\|$

Preuve :

Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \|Ax\| \end{array}$. L'application f est continue sur le compact $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ (fermé, borné). Ainsi, f atteint ses bornes et alors : $\exists v \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\} \setminus \|A\| = \|Av\|$.

Temps
13'7'' speechless
11'48'' speechless