L'oral à l'agrégation de maths
- Isenmann

Théorème de Burnside

104 157
106
155

Théorème : (déterminant de Vandermonde)

Soit $\mathbb{K}$ corps, $n\geq 2$ et $(\omega_1;\dots;\omega_n)\in\mathbb{K}^n$.

Alors : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_1^{n-1} & \omega_2^{n-1} & \dots & \omega_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leq i<j\leq n}(\omega_j-\omega_i)$

Lemme : Soit $u\in End(\mathbb{C}^n)$

Alors : u est nilpotente ssi $\forall p\in[\![1;n]\!]$, $Tr(u^p)=0$

Preuve :

Puisque $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, χ_u est scindé et alors u est trigonalisable.

Soit $\lambda_1;\dots;\lambda_r$ ses valeurs propres non-nulles et 2 à 2 distinctes et $m_1;\dots;m_r$ leurs multiplicités respectives.

Ainsi, $\forall p\in[\![1;n]\!]$, $Tr(u^p)=\sum_{i=1}^{r} m_i\lambda_i^p$.

$\Rightarrow$ Supposons u nilpotente.

Ainsi, $\exists k\in\mathbb{N}\setminus X^k$ annule u et alors 0 est la seule valeur propre de u

i.e. il n'y a pas de λ_i

Alors : $\forall p\in[\![1;n]\!]$, $Tr(u^p)=0$.

$\Leftarrow$ Supposons que $\forall p\in[\![1;n]\!]$, $Tr(u^p)=0$.

Supposons par l'absurde u non-nilpotente.

Soit $\lambda_1;\dots;\lambda_r$ comme précédemment. On a $\sum_{i=1}^{r} m_i\lambda_i^p=0$.

En particulier, puisque $r\leq n$, on a :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_r \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^r & \dots & \lambda_r^r \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Or : $\det(A)=\lambda_1\times\dots\times\lambda_r\prod_{1\leq i<j\leq r}(\lambda_j-\lambda_i)\neq 0$

Ainsi, A est inversible et $m_1=\dots=m_r=0$.

ABSURDE

Ainsi, u est bien nilpotente.

Théorème : (de Burnside) Soit $G<GL_n(\mathbb{C})$ tel que : $\exists N\in\mathbb{N}^*\setminus\forall A\in G$, $A^N=I_n$.

Alors : G est fini.

Preuve : oral

> L'idée pour ce développement est de considérer une base de l'espace $Vect(G)$ afin de construire une application de G dans $\mathbb{C}^p$ pour laquelle son image est finie et elle est injective. Par inégalité sur les cardinaux, G sera fini.

Les matrices de G sont annulés par X^N-1 qui est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$. Ainsi, elles sont toutes diagonalisables de valeurs propres des racines N-ièmes de l'unité.

Comme $M_n(\mathbb{C})$ est un espace vectoriel de dimension finie, alors le sous-espace vectoriel $Vect(G)$ aussi.

Soit $p=\dim(Vect(G))$ et $(\Pi_i)_{i=1}^{p}\in G^p$ base de $Vect(G)$.

Soit $f: \begin{array}{l} G \to \mathbb{C}^p \\ A\mapsto[Tr(A\Pi_1);\dots;Tr(A\Pi_p)] \end{array}$.

$f(G)$ est un ensemble fini puisqu'il n'a qu'un nombre fini de sommes de n éléments de μ_N.

Pour montrer que G est fini, montrons que f injective

Soit $A,B\in G$ tels que $f(A)=f(B)$ i.e. $\forall i\in[\![1;p]\!]$,

$Tr(A\Pi_i)=Tr(B\Pi_i)$

Par linéarité de la trace et puisque (Π_i) est une base de $Vect(G)$, $\forall\Pi\in Vect(G)$, $Tr(A\Pi)=Tr(B\Pi)$.

Soit $k\in\mathbb{N}^*$ et $D=AB^{-1}$ (licite car $G<GL_n(\mathbb{C})$)

On a : $Tr(D^k)=Tr(AB^{-1}D^{k-1})=Tr(BB^{-1}D^{k-1})=Tr(D^{k-1})$

Ainsi, $Tr(D^k)=Tr(I_n)=n$

Par ailleurs,

$Tr((D-I_n)^k)=Tr\left[\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^jD^{k-j}\right]$ (par le binôme de Newton)

$=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j\times 1^{k-j}\,Tr(D^{k-j})$

$=(1-1)^k\times n$

$=0$

Ainsi, par le lemme, $D-I_n$ est nilpotente.

Or : D est diagonalisable et $\exists P\in GL_n(\mathbb{C})\setminus PDP^{-1}$ diagonale

donc : $P(D-I_n)P^{-1}=PDP^{-1}-I_n$ est diagonale.

Alors : $D-I_n$ est diagonalisable et nilpotente i.e $D=I_n$

Ainsi, $A=B$ et f est bien injective.

Finalement, G est fini car $|G|\leq|f(G)|$

Théorème : (déterminant de Vandermonde)
Soit $\mathbb{K}$ corps, $n \geq 2$ et $\omega_1; \dots; \omega_n \in \mathbb{K}^n$.

Alors : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & & \omega_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_1^{n-1} & \omega_2^{n-1} & \cdots & \omega_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\omega_j - \omega_i)$

Preuve :

On raisonne par récurrence sur $n \geq 2$.

* Initialisation : Pour $n=2$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 \end{vmatrix} = \omega_2 - \omega_1$.
* Hérédité : Soit $n \geq 3$. Supposons le résultat vrai à l'ordre $n-1$.

Le déterminant étant une forme n-linéaire alternée, on a que pour tout polynôme unitaire $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$,

$$\Delta(\omega_1; \dots; \omega_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & & \omega_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_1^{n-2} & \omega_2^{n-2} & \cdots & \omega_n^{n-2} \\ P(\omega_1) & P(\omega_2) & \cdots & P(\omega_n) \end{vmatrix}$$

En particulier, pour $P = \prod_{k=1}^{n-1} (X - \omega_n)$, on a :

$$\Delta(\omega_1; \dots; \omega_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_{n-1} & \omega_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \omega_1^{n-2} & \omega_2^{n-2} & \cdots & \omega_{n-1}^{n-2} & \omega_n^{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & P(\omega_n) \end{vmatrix}$$

$$= \left| \prod_{k=1}^{n-1} (\omega_n - \omega_k) \right| \Delta(\omega_1; \dots; \omega_{n-1})$$

$$= \prod_{k=1}^{n-1} (\omega_n - \omega_k) \times \prod_{1 \leq i < j \leq n-1}^{n} (\omega_j - \omega_i)$$

$$= \prod_{1 \leq i < j \leq n}^{n} (\omega_j - \omega_i)$$

OU

$\forall i \in [\![n; 2]\!]$
$L_i \leftarrow L_i - \omega_1 L_{i-1}$

$$\overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \omega_2 - \omega_1 & \cdots & \omega_n - \omega_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \omega_2^{n-2}(\omega_2 - \omega_1) & \cdots & \omega_n^{n-2}(\omega_n - \omega_1) \end{vmatrix}}^{n \text{ lignes, } n \text{ colonnes}}$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} \omega_2 - \omega_1 & \cdots & \omega_n - \omega_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_2^{n-2}(\omega_2 - \omega_1) & & \omega_n^{n-2}(\omega_n - \omega_1) \end{vmatrix}}_{(n-1) \text{ lignes, } (n-1) \text{ colonnes}}$$

donc : $\Delta(\omega_1; \dots; \omega_n) = \left[\prod_{k=2}^{n} (\omega_k - \omega_1) \right] \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \omega_2 & \cdots & \omega_n \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_2^{n-2} & \cdots & \omega_n^{n-2} \end{vmatrix}$

Proposition : Soit $G < GL_n(\mathbb{C})$, $p = \dim(\mathrm{Vect}(G))$.
Alors : il existe une base $(\Pi_i)_{i=1}^{p}$ de $\mathrm{Vect}(G)$ telle que $\forall i \in [\![1; p]\!]$, $\Pi_i \in G$.

Preuve :

Soit $e_1; \dots; e_p \in \mathrm{Vect}(G)^p$ base de $\mathrm{Vect}(G)$.

$$e_1 = \sum_{k=1}^{m_1} \lambda_{1,k} \Pi_{1,k} \; ; \dots ; \; e_p = \sum_{k=1}^{m_p} \lambda_{p,k} \Pi_{p,k}$$

avec $\lambda_{i,j} \in \mathbb{C}$ et $\Pi_{i,j} \in G$. par définition de $\mathrm{Vect}(G)$

Ainsi, puisque $(e_i)_{i=1}^{p}$ est une base de $\mathrm{Vect}(G)$, $(\Pi_{i,j})_{\substack{i \in [\![1;p]\!] \\ j \in [\![1; \max(m_i)]\!]}}$ forme une famille génératrice de $\mathrm{Vect}(G)$.

On peut alors extraire une base $(\Pi_i)_{i=1}^{p} \in G^p$ de $\mathrm{Vect}(G)$.

Temps
12'16'' speechless