leçons :
102 : groupe des nombres complexes de module 1.
103 : exemples et applications des notions de sous groupe distingué et de gr quotient
107 : Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-ev

Tables de caractères et sous-groupes distingués

44

Référence : Gabriel Peyré "L'algèbre discrète de la transformation de Fourier" page 230

Thm : Soit G un groupe fini et soient ρ_i (resp. χ_i) $(1 \leq i \leq n)$ les représentations irréductibles (resp. les caractères associés) de G sur V_i.

On pose $K_{\chi_i} = \{ g \in G \mid \chi_i(g) = \chi_i(1) \}$

Alors les sous-groupes distingués de G sont exactement les $\bigcap_{i \in I} K_{\chi_i}$ pour $I \subset [\![1,n]\!]$, $I \neq \emptyset$

et $K_{\chi_i} = \operatorname{Ker} \rho_i$ $\forall i \in [\![1,n]\!]$.

preuve :

① MQ les K_{χ_i} sont des sous-groupes distingués de G (les intersections seront également des sous-groupes distingués)

Soit $i \in [\![1,n]\!]$ et $g \in G$

$g^{|G|} = 1$ et ρ_i morphisme donc $\rho_i(g)^{|G|} = id_{V_i}$

On en déduit que $\rho_i(g)$ est diagonalisable et ses valeurs propres sont des racines de $X^{|G|} - 1$ donc des racines de l'unité. Il y en a $\dim V_i = \chi_i(1)$ comptées avec multiplicité. Notons $(\lambda_j^{(i)}(g))_{1 \leq j \leq \chi_i(1)}$ ces valeurs propres

On a $\chi_i(g) = \operatorname{Tr} \rho_i(g) = \sum_{j=1}^{\chi_i(1)} \lambda_j^{(i)}(g)$

$$|\chi_i(g)| \leq \sum_{j=1}^{\chi_i(1)} \underbrace{|\lambda_j^{(i)}(g)|}_{\leq 1} \leq \sum_{j=1}^{\chi_i(1)} 1 = \chi_i(1)$$ par inégalité triangulaire

Ainsi $\chi_i(g) = \chi_i(1) \iff \forall j \in [\![1, \chi_i(1)]\!]\ \lambda_j^{(i)}(g) = 1$ (cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire les $\lambda_j^{(i)}(g)$ sont positivement liés donc positionnées sur une même demi droite)

$\iff \rho_i(g) = id$

$\iff g \in \operatorname{Ker} \rho_i$

D'où $K_{\chi_i} = \operatorname{Ker} \rho_i$ et K_{χ_i} est un sous-groupe distingué de G.

② MQ un sous-groupe distingué est de cette forme

Soit $N \triangleleft G$ et ρ la représentation régulière de G/N de degré $|G/N|$ sur $\mathcal{U}$.

On pose $\tilde{\rho} : \begin{cases} G \to GL(\mathcal{U}) \\ g \mapsto \rho(\pi(g)) \end{cases}$ où $\pi : G \to G/N$ est la projection canonique

$\tilde{\rho}$ est une représentation de G

De plus $\operatorname{Ker} \tilde{\rho} = \{ g \in G \mid \rho(\pi(g)) = id \}$

$= \{ g \in G \mid \pi(g) = 1 \}$ car ρ est injective

$= N$

D'où $N = \operatorname{Ker} \tilde{\rho} = K_{\tilde{\chi}}$ où $\tilde{\chi}$ est le caractère associé à $\tilde{\rho}$

Décomposition en représentations irréductibles de U :

$$U = \bigoplus_{W_i \text{ irr}} W_i^{\oplus n_i}$$

Dans une base adaptée, $\tilde{\rho}(g)$ s'écrit

$$\begin{array}{c} \overset{w_1}{\leftrightarrow}\overset{w_1}{\leftrightarrow} \\ \begin{pmatrix} \boxed{} & & & (0) \\ & \boxed{} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \boxed{} \end{pmatrix} \end{array}$$

D'où $K_{\tilde{\chi}} = \operatorname{Ker} \tilde{\rho}$

$= \bigcap_{i \in I} \operatorname{Ker}(\rho_i)$ où $I = \{ i \mid W_i$ apparait dans la décomposition en irréductible de $\tilde{\rho} \}$

$= \bigcap_{i \in I} K_{\chi_i}$ par ① $\square$

Corollaire : Soit G un groupe, de caractères irréductibles χ_i.
Alors G est simple si et seulement si $\forall i \neq 1 \ \forall g \in G \setminus \{1\} \ \chi_i(g) \neq \chi_i(1)$

<u>preuve :</u>
Si il existe $i \neq 1$, $g \in G \setminus \{1\}$ tq $\chi_i(g) = \chi_i(1)$, alors $\operatorname{Ker} \rho_i = K_{\chi_i}$ est un sous-groupe distingué non trivial de G. Donc G n'est pas simple.

Réciproque : Si G n'est pas simple, il existe $g \neq 1$ dans un certain sous groupe distingué non trivial N de G.

On pose $N = \bigcap_{i \in I} K_{\chi_i}$

Si $i \in I \setminus \{1\}$, on a $\chi_i(g) = \chi_i(1)$.