L'oral à l'agrégation de mathématiques - Isenmann

$SO_3(\mathbb{R})$ et les quaternions

101 108 160
103 150 161
106 154 191

Définition : Le corps gauche des quaternions $\mathbb{H}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre non-commutative engendrée par i, j, k tels que $i^2 = j^2 = k^2 = -1$; $ij = k$; $jk = i$ et $ki = j$.
Pour $q = a + ib + jc + kd \in \mathbb{H}$, on appelle norme de q : $N(q) = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$ et on note $Re(q) = a$.

On note $Sp(1) = \{q \in \mathbb{H} \mid N(q) = 1\}$
$Im(\mathbb{H}) = \{q \in \mathbb{H} \mid Re(q) = 0\}$

Proposition : Soit $q = a + ib + jc + kd \in \mathbb{H}$ et $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$.
Alors : (1) $2\,Re(q) = q + \bar{q}$ avec $\bar{q} = a - ib - jc - kd$
(2) $\overline{q_1 q_2} = \bar{q_2}\,\bar{q_1}$
(3) $N(q)^2 = q\bar{q}$
(4) $Z(\mathbb{H}) := \{q \in \mathbb{H} \mid \forall q' \in \mathbb{H},\ q q' q^{-1} = q'\} = \mathbb{R}$
(5) $Z(\mathbb{H}) \cap Sp(1) = \{\pm 1\}$

Lemme : La sphère unité $\mathbb{S}^{n-1}$ de $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs. En particulier, $Sp(1)$ est connexe par arcs.

Définition : On appelle retournement toute symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace de dimension $n-2$. En particulier, un retournement de $\mathbb{R}^3$ autour de $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ est de la forme :

$$r_{\vec{v}} : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ z \mapsto 2\dfrac{\langle z, \vec{v}\rangle}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v} - z \end{array}$$

Théorème : $SO_3(\mathbb{R})$ est engendré par les retournements.

Théorème : $SO_3(\mathbb{R})$ et $Sp(1)/\{\pm 1\}$ sont isomorphes.

Preuve :

oral

L'idée pour ce développement est d'exploiter le caractère non-abélien de $\mathbb{H}$ et l'action par conjugaison qui en découle pour :
(1) Créer un morphisme entre $Sp(1)$ et $O_3(\mathbb{R})$
(2) Montrer que son image est dans $SO_3(\mathbb{R})$
(3) Montrer que son image est exactement $SO_3(\mathbb{R})$
(4) Conclure par le premier théorème d'isomorphisme

① Créons un morphisme $s : Sp(1) \to O_3(\mathbb{R})$.
Soit $\forall u \in Sp(1)$, l'application $S_u : \begin{array}{l}\mathbb{H} \to \mathbb{H} \\ q \mapsto uqu^{-1}\end{array}$ qui est bijective d'inverse $S_{\bar{u}}$ et soit
$S : \begin{array}{l} Sp(1) \to Bij(\mathbb{H}) \\ u \mapsto S_u \end{array}$ morphisme de groupes définissant l'action par conjugaison de $Sp(1)$ sur $\mathbb{H}$.

Par ailleurs, $\forall u \in Sp(1), \forall q \in \mathbb{H}$,
$N(S_u(q)) = N(uqu^{-1}) = \underbrace{N(u)}_{=1} N(q) \underbrace{N(u^{-1})}_{=1} = N(q)$

Ainsi, puisque S_u est linéaire, $S : Sp(1) \to O(\mathbb{H})$.

De plus, $\forall u \in Sp(1), \forall q \in Im(\mathbb{H})$,
$$Re(S_u(q)) = \frac{uq\bar{u} + \overline{uq\bar{u}}}{2} = \frac{u(q+\bar{q})\bar{u}}{2} = 0$$

Ainsi, $Im(\mathbb{H})$ est stable par S_u.
Soit alors $s_u = S_{u|Im(\mathbb{H})} \in O(Im(\mathbb{H})) \simeq O_3(\mathbb{R})$, et $s : \begin{array}{l} Sp(1) \to O_3(\mathbb{R}) \\ u \mapsto s_u \end{array}$ le morphisme associé, de noyau $\ker(s) = Z(\mathbb{H}) \cap Sp(1) = \{\pm 1\}$.

② Montrons que $s(Sp(1)) \subseteq SO_3(\mathbb{R})$.
On munit $Sp(1)$ de la topologie euclidienne en voyant $Sp(1) \simeq \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \|x\|_4 = 1\}$, et on munit $O_3(\mathbb{R})$ de la norme subordonnée de $\mathbb{R}^3$.
Ainsi, si $u = a + ib + jc + kd$, alors les coefficients de la matrice s_u sont des polynômes en a, b, c, d.
Alors s est continue.
Par ailleurs, $\det : O_3(\mathbb{R}) \to \{\pm 1\}$ est continue et alors $\det \circ s$ est continue. Par connexité de $Sp(1)$, $\det \circ s(Sp(1))$ est connexe et donc réduit à $\{1\}$ ou $\{-1\}$. et alors $\det \circ s(Sp(1)) = \{1\}$.
Or : $\det \circ s(1) = \det(I_3) = 1$
Ainsi, $s(Sp(1)) \subseteq SO_3(\mathbb{R})$

③ Montrons que $s(Sp(1)) = SO_3(\mathbb{R})$.
Comme $SO_3(\mathbb{R})$ est engendré par les retournements, il suffit de montrer que ceux-ci sont atteints.
Soit $r_{\vec{v}}$ retournement autour de $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ que l'on identifie à : $v = iv_1 + jv_2 + kv_3 \in Im(\mathbb{H})$.
Puisque $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $r_{\vec{v}}$ et $r_{\lambda\vec{v}}$ définissent le même retournement, on p.s. $\vec{v}$ unitaire et $v \in Im(\mathbb{H}) \cap Sp(1)$.
Ainsi, $\bar{v} = -v$ et $v\bar{v} = N(v) = 1$ d'où : $v^2 = -1$.
Alors : $(s_v)^2 = s_{v^2} = s_{-1} = id_{|Im(\mathbb{H})}$.
Ainsi, s_v est une rotation d'angle π ou id.
Or : $v \notin \{\pm 1\} = \ker(s)$ et alors $s_v \neq id$
De plus, $s_v(v) = v$ i.e. s_v fixe $v\mathbb{R}$ qui est alors sa droite de rotation
Finalement, $s_v = r_{\vec{v}}$. Ceci étant vrai pour tout retournement de $\mathbb{R}^3$, on a : $s(Sp(1)) = SO_3(\mathbb{R})$.

④ Par le premier théorème d'isomorphisme,
$$SO_3(\mathbb{R}) \simeq Sp(1)/\{\pm 1\}$$

Lemme : La sphère unité $\mathbb{S}^{n-1}$ de $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs. En particulier, $Sp(1)$ est connexe.

__Preuve :__

- Soit $a, b \in \mathbb{S}^{n-1}$ deux points non-antipodaux. Soit $\gamma : \begin{array}{l} [0;1] \to \mathbb{S}^{n-1} \\ t \mapsto \dfrac{(1-t)a+tb}{\|(1-t)a+tb\|} \end{array}$ bien définie car $\forall t \in [0;1]$, $(1-t)a+tb \neq 0$ par choix de a et b. En effet, si $(1-t)a+tb=0$ alors $\|(1-t)a\| = \|-tb\|$ donc : $|1-t| = |t|$ d'où : $t = \frac{1}{2}$ ce qui est exclu puisque $a \neq -b$.
- Pour deux points antipodaux, il suffit de considérer un point intermédiaire.
- Ainsi, on a trouvé des chemins liant tout couple de points de $\mathbb{S}^{n-1}$.
- Puisque $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4$, on assimile $Sp(1)$ à la sphère unité $\mathbb{S}^3$ de $\mathbb{R}^4$ qui est connexe par arcs et en particulier, connexe.

Théorème : $SO_3(\mathbb{R})$ est engendré par les retournements.

__Preuve :__

Soit $A \in SO_n(\mathbb{R})$. Par le théorème de réduction des endomorphismes orthogonaux, $\exists P \in GL_n(\mathbb{R}) \mid$

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} \boxed{R_1} & & & & (0) \\ & \ddots & & & \\ & & \boxed{R_k} & & \\ & & & 1 & \\ (0) & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } R_i = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}$$

__Or :__ dans le plan, toute rotation est produit de deux réflexions.

En effet,
$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(2\theta_i) & \sin(2\theta_i) \\ \sin(2\theta_i) & -\cos(2\theta_i) \end{pmatrix}}_{\substack{\text{réflexion de } \mathbb{R}^2 \\ \text{d'axe } \theta_i \,:\, S_i}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & \sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & -\cos(\theta_i) \end{pmatrix}}_{\substack{\text{réflexion de } \mathbb{R}^2 \\ \text{d'axe } \frac{\theta_i}{2} \,:\, T_i}}$$

Ainsi,
$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} \boxed{R_1} & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \times \dots \times \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \boxed{R_k} & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{S_1} & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}}_{\text{retournement de } \mathbb{R}^n} \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{T_1} & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}}_{\text{retournement de } \mathbb{R}^n} \times \dots \times \begin{pmatrix} \boxed{S_k} & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{T_k} & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$$

__Alors :__ A est bien produit de retournements.

__Temps :__
12' 40'' speechless