Algèbre linéaire numérique
— Allaire

Décompositions LU et de Cholesky

149 162
157
158

Théorème : Soit $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :
$\forall k\in[\![1;n]\!],\ \Delta^k := \begin{pmatrix} a_{1,1} & - & a_{1,k} \\ | & & | \\ a_{k,1} & - & a_{k,k}\end{pmatrix}\in GL_k(\mathbb{K})$.
Alors : $\exists!(L;U)\in GL_n(\mathbb{K})\ \backslash\ A=LU$ avec L triangulaire inférieure avec des 1 sur sa diagonale et U triangulaire supérieure.

Preuve :

EXISTENCE

① Montrons que au cours de l'élimination de Gauss, $\forall k\in[\![1;n]\!]$, les pivots $a_{k,k}^k$ ne s'annulent pas.

Montrons-le par récurrence sur $k\in[\![1;n]\!]$.

* Initialisation : $a_{1,1}=\Delta^1\in GL_1(\mathbb{K})$. ok

* Hérédité : Soit $k\in[\![1;n]\!]$. Supposons que tous les pivots d'ordre $<k$ ne s'annulent pas.

On peut calculer la k-ième itération de l'élimination de Gauss : $A^k=E^{k-1}\times\dots\times E^1\times A$

$$\boxed{\text{avec } E^i=\begin{pmatrix}1 & & (0)\\ 0 & -\ell_{i+1,i} & \\ | & & \\ 0 & -\ell_{n,i}\ (0) & 1\end{pmatrix} \text{ et } \ell_{j,i}=\frac{a_{j,i}^i}{a_{i,i}^i}}$$

d'où : $L^kA^k=A$

i.e. $\begin{pmatrix}L_{1,1}^k & 0\\ L_{2,1}^k & I_{n-k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_{1,1}^k & A_{1,2}^k\\ A_{2,1}^k & A_{2,2}^k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Delta^k & A_{1,2}\\ A_{2,1} & A_{2,2}\end{pmatrix}$

Ainsi, puisque L^k n'a que des 1 sur sa diagonale,

$$\underbrace{\det(\Delta^k)}_{\neq 0}=\det(L_{1,1}^kU_{1,1}^k)=\underbrace{\left(\prod_{i=1}^{k-1}a_{i,i}^i\right)}_{\neq 0\ \text{(par hypothèse de récurrence)}}\times a_{k,k}^k$$

Alors : $a_{k,k}^k\neq 0$.

② On peut alors effectuer l'élimination de Gauss jusqu'à la n-ième ligne : $LU=A$.

UNICITÉ

Soit $A=L_1U_1=L_2U_2$.
Alors : $L_2^{-1}L_1=U_2U_1^{-1}=I_n$ (car L_1 et L_2^{-1} n'ont que des 1 sur leur diagonales).
Ainsi, $L_1=L_2$ et $U_2=U_1$.

Théorème : Soit $A\in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
Alors : $\exists!B\in GL_n(\mathbb{R})\ \backslash\ A=BB^*$ avec B triangulaire inférieure à diagonale positive.

Preuve :

EXISTENCE

① Montrons que A admet une décomposition LU.
Supposons par l'absurde qu'$\exists k\in[\![1;n]\!]\ \backslash\ \Delta^k\notin GL_k(\mathbb{R})$.
Ainsi, $\exists\begin{pmatrix}x_1\\ |\\ x_k\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^k\backslash\{0\}\ \big|\ \Delta^k\begin{pmatrix}x_1\\ |\\ x_k\end{pmatrix}=0$.
Alors $x:=\begin{pmatrix}x_1\\ |\\ x_k\\ 0\\ |\\ 0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ vérifie $\langle Ax;x\rangle=0$

ABSURDE puisque $A\in S_n^{++}(\mathbb{R})$

Soit alors $A=\underbrace{\begin{pmatrix}1 & (0)\\ (*) & 1\end{pmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{pmatrix}u_{1,1} & (*)\\ (0) & u_{n,n}\end{pmatrix}}_{U}$ sa décomposition LU.

② Déterminons B.
En reprenant la preuve précédente, $\forall k\in[\![1;n]\!]$,
$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{car } A\in S_n^{++}(\mathbb{R})}}{0<}\det(\Delta^k)=\prod_{i=1}^k u_{i,i}$. Alors $\forall i\in[\![1;n]\!],\ u_{i,i}>0$.

Soit $D=\begin{pmatrix}\sqrt{u_{1,1}} & (0)\\ (0) & \sqrt{u_{n,n}}\end{pmatrix}$, $\underset{\substack{\uparrow\\ \text{triangulaire}\\ \text{inférieure}}}{B=LD}$ et $\underset{\substack{\uparrow\\ \text{triangulaire}\\ \text{supérieure}}}{C=D^{-1}U}$

Montrons que $C=B^*$.
$A\in S_n(\mathbb{R})$ donc $A=A^*$
donc $BC=C^*B^*$
donc : $C(B^*)^{-1}=B^{-1}C^*$

Or : $C(B^*)^{-1}$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur sa diagonale et $B^{-1}C^*$ est triangulaire inférieure.
d'où : $C(B^*)^{-1}=B^{-1}C^*=I_n$ d'où : $C=B^*$.

UNICITÉ

Soit $A=B_1B_1^*=B_2B_2^*$
Alors : $B_2^{-1}B_1=B_2^*(B_1^*)^{-1}=D$ diagonale et alors :
Ainsi, $B_1=B_2D$
$A=B_1B_1^*=B_2DD^*B_2^*=B_2D^2B_2^*$.
Ainsi, $D^2=I_n$ et $\forall i\in[\![1;n]\!],\ d_i=\pm 1$.
Or les coefficients diagonaux d'une décomposition de Cholesky sont positifs.
d'où : $\forall i\in[\![1;n]\!],\ d_i=1$ et $B_1=B_2$.

Temps :
14' 55"
13' 26"