Analyse pour l'agrégation
– Zuily

Équation différentielle dans les espaces de Hölder

203 241
204 208
221 228

Lemme : (principe du maximum faible sur $\mathbb{R}$)
Soit $]a;b[\subseteq\mathbb{R}$, $L=A\frac{d^2}{dx^2}+B\frac{d}{dx}+C$ opérateur tel que $A:]a;b[\to\mathbb{R}_+^*$; $B:]a;b[\to\mathbb{R}$ et $C:]a;b[\to\mathbb{R}_-$
soit $u\in\mathcal{C}([a;b])\cap\mathcal{C}^2(]a;b[)$ tel que $L(u)\geq 0$.

Alors : $\sup\limits_{x\in]a;b[} u(x)\leq \max\{u(a);u(b);0\}$

Théorème : Soit $\alpha\in]0;1]$, $a,b\in\mathbb{R}$, $q\in\mathcal{C}^{0,\alpha}(]a;b[)$ avec $q\geq 0$.
Alors : pour tout $f\in\mathcal{C}^{0,\alpha}(]a;b[)$, le système :
$(E):\begin{cases}-u''+qu=f \text{ sur }]a;b[\\ u(a)=u(b)=0\end{cases}$ admet une unique solution $u\in\mathcal{C}^{2,\alpha}(]a;b[)$.

Preuve : oral

> L'idée pour ce développement est de montrer :
> (i) L'unicité à l'aide du principe du maximum faible sur $\mathbb{R}$
> (ii) L'existence par un argument de connexité en exploitant la structure d'inclusion compacte pour les espaces de Hölder.

UNICITÉ

Soit $M=\|q\|_\infty$, $P=\frac{d^2}{dx^2}-q$, $u\in\mathcal{C}^2([a;b])$ et $x\in[a;b]$.
Montrons que : $\exists C(M)>0 \mid \|u\|_\infty\leq C(M)\|P(u)\|_\infty$

Soit $\lambda=\sqrt{M+1}$ et $g:\begin{array}{l}[a;b]\to\mathbb{R}\\ x\mapsto e^{\lambda(b-a)}-e^{\lambda(x-a)}\end{array}$

de sorte que : $0\leq g\leq e^{\lambda(b-a)}=:C(M)$.

Ainsi, $P(g)(x)=(q-\lambda^2)e^{\lambda(x-a)}-\underbrace{qe^{\lambda(b-a)}}_{\geq 0}$
$\leq\underbrace{(M-\lambda^2)}_{=-1}\underbrace{e^{\lambda(x-a)}}_{\geq 1}$
≤ -1

Soit $v:\begin{array}{l}[a;b]\to\mathbb{R}\\ x\mapsto g(x)\|P(u)\|_\infty\end{array}$.

Ainsi, $P(v)(x)=P(g)(x)\|P(u)\|_\infty$
$\leq -\|P(u)\|_\infty$
$\leq P(u)(x)$

d'où : $P(u-v)\geq 0$.
Ainsi, par le principe du maximum faible,

$0=\max\{\underbrace{(u-v)(a)}_{=-[e^{\lambda(b-a)}-1]<0};\underbrace{(u-v)(b)}_{=0};0\}\geq\sup\limits_{x\in]a;b[}\{(u-v)(x)\}$

avec $\sup\limits_{x\in]a;b[}\{(u-v)(x)\}=\sup\limits_{x\in]a;b[}\{u(x)\}-C(M)\|P(u)\|_\infty$

d'où : $\sup\limits_{x\in]a;b[}\{u(x)\}\leq C(M)\|P(u)\|_\infty$

De même, pour $-u$, on obtient alors :
$|u(x)|\leq C(M)\|P(u)\|_\infty$

Soit alors $u_1,u_2\in\mathcal{C}^{2,\alpha}(]a;b[)\subseteq\mathcal{C}^2([a;b])$ deux solutions de (E), soit $w=u_1-u_2$ qui vérifie alors $\begin{cases}w''-qw=0\\ w(a)=w(b)=0\end{cases}$. Ainsi, $\|P(w)\|_\infty=0$ et alors $w=0$.
Ainsi, $u_1=u_2$ d'où l'unicité.

EXISTENCE

Soit pour tout $t\in[0;1]$, l'application :
$P_t:\begin{array}{l}X:=\{u\in\mathcal{C}^{2,\alpha}(]a;b[)\mid u(a)=u(b)=0\}\to Y:=\mathcal{C}^{0,\alpha}(]a;b[)\\ u\mapsto -u''+tqu\end{array}$

Soit $A=\{t\in[0;1]\mid P_t \text{ est bijective}\}$
$=\{t\in[0;1]\mid P_t \text{ est surjective}\}$ (par unicité)

Montrons que A est non-vide, ouvert, fermé dans $[0;1]$:

- A est non-vide
$u(x)=-\int_a^x\int_a^t f(s)\,ds\,dt+\frac{x-a}{b-a}\int_a^b\int_a^t f(s)\,ds\,dt$ vérifie bien $u\in X$ et $P_0(u)=-u''=f$

- A est ouvert
L'application $P:t\mapsto P_t$ est continue. En effet soit $\varepsilon>0$.
$\|P_{t+\varepsilon}(u)-P_t(u)\|_\alpha\leq\varepsilon\|q\|_\alpha\|u\|_\alpha$
Ainsi, $A=P^{-1}(GL(X;Y))$ est ouvert.

- A est fermé
Soit $(t_k)\in A^{\mathbb{N}}$ tel que : $t_k\xrightarrow[+\infty]{} t_0\in[0;1]$.
Puisque $(t_k)\in A^{\mathbb{N}}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists! u_n\in X \begin{cases}-u_n''+t_nqu_n=f\\ u_n(a)=u_n(b)=0\end{cases}$
Soit alors une telle suite $(u_n)\in X^{\mathbb{N}}$.
On peut montrer que $\forall\varepsilon\in]0;\frac{1}{3}]$, $\exists C_\varepsilon>0 \mid$
$\|u_n\|_{2,\alpha}\leq 3C(M)\|f\|_\infty[1+C_\varepsilon+C_\varepsilon\|q\|_\infty]+3\|f\|_\alpha$

> En effet, on part de : $\|u_n\|_{2,\alpha}=\|u_n\|_\infty+\|u_n'\|_\infty+\|u_n''\|_\alpha$
> Par le raisonnement de l'unicité,
> (i) $\|u_n\|_\infty\leq C(M)\|P_{t_n}(u_n)\|_\infty\leq C(M)\|f\|_\infty$
> (ii) Puisque $]a;b[$ est un ouvert borné, par le lemme, $\forall\varepsilon>0$, $\exists C_\varepsilon>0 \mid \|u_n\|_{1,\alpha}\leq\varepsilon\|u_n\|_{2,\alpha}+C_\varepsilon\|u_n\|_\infty$
> Par le point (i), on a :
> $\|u_n'\|_\infty\leq\|u_n\|_{1,\alpha}\leq\varepsilon\|u_n\|_{2,\alpha}+C_\varepsilon\times C(M)\times\|f\|_\infty$
> (iii) $\|u_n''\|_\alpha\leq\|u_n''-t_nqu_n\|_\alpha+t_n\|qu_n\|_\alpha$
> $\leq\|f\|_\alpha+\|q\|_\alpha\|u_n\|_\alpha$
> $\leq\|f\|_\alpha+\|q\|_\alpha\|u_n\|_{1,\alpha}$
> $\leq\|f\|_\alpha+\|q\|_\alpha[\varepsilon\|u_n\|_{2,\alpha}+C_\varepsilon C(M)\|f\|_\infty]$
> Ainsi, $\|u_n\|_{2,\alpha}\leq\varepsilon\|q\|_\alpha\|u_n\|_{2,\alpha}+\varepsilon\|u_n\|_{2,\alpha}+C(M)\|f\|_\infty[1+C_\varepsilon+C_\varepsilon\|q\|_\alpha]$
> $+\|f\|_\alpha$

Soit alors $\varepsilon \in]0;\frac{1}{3}]$. Ainsi, $\varepsilon \|q\|_\alpha \leq \frac{1}{3}$ et alors :
$1 - \varepsilon - \varepsilon\|q\|_\alpha \geq \frac{1}{3}$ d'où :
$\|u_n\|_{2,\alpha} \leq 3\,C(\Omega)\,\|f\|_\infty\left[1 + C_\varepsilon + C_\varepsilon\|q\|_\alpha\right] + 3\|f\|_\alpha$

Ainsi, la suite (u_n) est bornée.
Puisque l'injection $\mathcal{C}^{2,\alpha} \subseteq \mathcal{C}^{2,\alpha'}$ est compacte, il existe une sous-suite de (u_n) (que l'on note toujours (u_n)) telle que $u_n \xrightarrow[+\infty]{} u \in \mathcal{C}^{2,\alpha'}(]a;b[)$ avec $0 < \alpha' < \alpha$.

Or : $\forall \beta \leq 2$, $|u_n^{(\beta)}(x) - u_n^{(\beta)}(y)| \leq \|u_n\|_{2,\alpha}|x-y|^\alpha$
$\leq \sup\limits_{n \in \mathbb{N}}\{\|u_n\|_{2,\alpha}\}|x-y|^\alpha$

De plus, $(u_n^{(\beta)})$ converge uniformément vers $u^{(\beta)}$ car $u_n \xrightarrow[+\infty]{} u$ dans $\mathcal{C}^{2,\alpha'}(]a;b[)$ et alors $u_n^{(\beta)} \xrightarrow[+\infty]{} u^{(\beta)}$
(car $\|u_n - u\|_{2,\alpha'} \geq \|u_n^{(\beta)} - u^{(\beta)}\|_\infty$ [illegible])
En passant à la limite, on a alors :
$$|u^{(\beta)}(x) - u^{(\beta)}(y)| \leq \underbrace{\sup_{n\in\mathbb{N}}\{\|u_n\|_{2,\alpha}\}}_{<+\infty}|x-y|^\alpha$$

Ainsi, $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(]a;b[)$ et alors $t_0 \in A$.

Finalement, $A = [0;1]$ par connexité de ce dernier. En particulier, $1 \in A$ d'où l'existence.

Remarques : (1) Ce raisonnement n'est pas valable dans les espaces $\mathcal{C}^k$ car une suite bornée de $\mathcal{C}^2$, par exemple, admet une sous-suite convergente dans $\mathcal{C}^{k'}$ avec $k' < 2$ mais la limite n'est pas forcément dans $\mathcal{C}^2$ et on ne peut alors pas passer à la limite dans (E).

(2) Il y a des manières plus simples de montrer ce résultat mais les généralisations multidimensionnelles ressemblent à celle-ci.

Temps
15' 46'' speed writer
14' 40'' speed writer
15' 19'' speechless
13' 29'' speechless

Analyse pour l'agrégation
- Zuily, Queffelec

Équation différentielle dans des espaces de Hölder

Soit $F \subseteq \mathbb{R}$ fermé. On a $\forall k \in \mathbb{N}$,
$\mathcal{C}^{k+1}(F) \subseteq \mathcal{C}^{k}(F) \subseteq \mathcal{C}^{k-1}(F)$
Mais c'est insuffisant ! Par exemple toute suite bornée de $\mathcal{C}^{k+1}(F)$ ne converge pas forcément vers un élément de $\mathcal{C}^{k+1}(F)$. On va construire un entre-deux entre les espaces de fonctions continues bornées : $\mathcal{C}^{k+1}_b(\Omega) \subseteq X \subseteq \mathcal{C}^{k}_b(\Omega)$.

I] L'espace $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)$

Soit par la suite $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ ouvert, $\alpha \in]0;1]$

Définition : On appelle espace de Hölder $0,\alpha$:
$\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega) = \{ f \in L^\infty(\Omega) \mid \exists C>0 \mid \forall x,y \in \Omega,$
$|f(x)-f(y)| \leq C|x-y|^\alpha \}$
muni de la norme : $\|f\|_\alpha = \|f\|_\infty + \sup\limits_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$

Remarques : (1) L'intérêt est de supposer $|x-y|<\delta$ petit car si $|x-y|\geq\delta$, alors :
$|f(x)-f(y)| \leq 2\|f\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty \frac{|x-y|^\alpha}{\delta^\alpha} \leq C|x-y|^\alpha$
(2) Ce sont bien des espaces intermédiaires :
$\mathcal{C}^1_b(\Omega) \subseteq \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega) \subseteq \mathcal{C}^0_b(\Omega)$
inégalité des accroissements finis — définition
$|f(x)-f(y)| \leq f'(c)|x-y| \leq f'(c)|x-y|^\alpha$

Exemple : Soit $f : \begin{array}{l}]-1;1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x|^\alpha \end{array}$. $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(]-1;1[)$.
- Pour $\alpha = 1$, ok par inégalité triangulaire
- Soit $0<\alpha<1$ et $g : \begin{array}{l} [0;1[\to \mathbb{R} \\ s \mapsto \frac{1-s^\alpha}{(1-s)^\alpha} \end{array}$.

On a : $g'(s) \leq 0$ d'où : $0 \leq g(s) \leq g(0) = 1$
donc : $1-s^\alpha \leq (1-s)^\alpha$
Soit $x,y \in]-1;1[$. Ops $|x|>|y|$ et appliquer l'inégalité à $s = \frac{|y|}{|x|}$. On a :
$|x|^\alpha - |y|^\alpha \leq [|x|-|y|]^\alpha \leq |x-y|^\alpha$

Remarques : (1) Les fonctions de $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)$ sont uniformément continues.
(2) Il existe des $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R})$.
Par exemple, $f(x) = \frac{1}{\ln|x|} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ est bien $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ mais pas dans $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R})$ car sinon on aurait :
$|f(x)-f(0)| \leq Cx^\alpha$ i.e. $1 \leq C|x|^\alpha \ln|x|$
ABSURDE car $|x|^\alpha \ln|x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

Exemple : Soit $f \in \mathcal{C}^{0,1}(\Omega)$ tel que $f \geq 0$. Alors $f^\alpha \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)$.
En effet, soit $0<\alpha<1$. On reprend l'inégalité de l'exemple précédent : $\forall s \in [0;1[$, $1-s^\alpha \leq (1-s)^\alpha$ et on l'applique à $s = \frac{f(y)}{f(x)}$ avec $f(x) \neq 0$ et $f(x) > f(y)$.
Ainsi, $f^\alpha(x) - f^\alpha(y) \leq [f(x)-f(y)]^\alpha$
$\leq [C|x-y|]^\alpha$ car $f \in \mathcal{C}^{0,1}$
$\leq C^\alpha |x-y|^\alpha$

Remarque : Une fonction $f \in \mathcal{C}^0_b(\Omega)$ ne se prolonge pas nécessairement en une fonction $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$.
Par exemple $f : \begin{array}{l}]0;1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(\frac{1}{x}) \end{array}$ ne se prolonge pas en 0.

Proposition : Toute $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)$ se prolonge en une fonction $\tilde{f} : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ bornée telle que $\exists C>0 \mid \forall x,y \in \overline{\Omega}$, $|\tilde{f}(x)-\tilde{f}(y)| \leq C|x-y|^\alpha$.
En particulier, $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega) \subseteq \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ et $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega) = \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Corollaire : $(\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega) ; \|\cdot\|_\alpha)$ est un espace de Banach.

Proposition : (1) $\forall \alpha \geq \alpha'$, $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega) \subseteq \mathcal{C}^{0,\alpha'}(\Omega)$ et l'inclusion est continue. (i.e. l'identité de $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)$ est dans $\mathcal{C}^{0,\alpha'}(\Omega)$)
(2) Si Ω est un ouvert borné et $\alpha > \alpha'$, alors l'inclusion $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega) \subseteq \mathcal{C}^{0,\alpha'}(\Omega)$ est compacte (i.e. l'image d'une boule est relativement compacte).

Preuve : (1) Soit $x,y \in \Omega$, $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)$.
- Si $|x-y| \leq 1$, alors $|f(x)-f(y)| \leq |x-y|^\alpha \leq |x-y|^{\alpha'}$
- Si $|x-y| > 1$, alors $|f(x)-f(y)| \leq 2\|f\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty |x-y|^{\alpha'}$

Ainsi, $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha'}(\Omega)$.
(2) Complicado (utilise Ascoli)

Théorème : (admis) Toute fonction de $\mathcal{C}^{0,1}(\mathbb{R})$ est dérivable presque partout.

II] L'espace $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)$

Définition : On appelle espace de Hölder k,α :
$\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega) = \{ f \in \mathcal{C}^k_b(\Omega) \mid \forall \beta \leq k, f^{(\beta)} \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega) \}$ muni de la norme : $\|f\|_{k,\alpha} = \sum\limits_{\beta \leq k} \|f^{(\beta)}\|_\alpha$

Proposition : $\|\cdot\|_{k,\alpha}$ est équivalente à la norme :
$\|f\|'_{k,\alpha} = \sum\limits_{\beta\leq k} \|f^{(\beta)}\|_\infty + \sup\limits_{x\neq y} \frac{|f^{(k)}(x)-f^{(k)}(y)|}{|x-y|^\alpha} = \sum\limits_{\beta < k} \|f^{(\beta)}\|_\infty + \|f^{(k)}\|_\alpha$

Preuve :
- $\|\cdot\|'_{k,\alpha} \leq \|\cdot\|_{k,\alpha}$ par définition
- Pour $\beta \leq k-1$, $\|f^{(\beta)}\|_\alpha = \|f^{(\beta)}\|_\infty + \sup\limits_{x\neq y} \frac{|f^{(\beta)}(x)-f^{(\beta)}(y)|}{|x-y|^\alpha}$
$\leq C\|f^{(\beta)}\|_\infty + \sup\limits_{\substack{x\neq y \\ |x-y|\leq 1}} \frac{|f^{(\beta)}(x)-f^{(\beta)}(y)|}{|x-y|^\alpha}$

Par l'inégalité des accroissements finis, $|f^{(\beta)}(x)-f^{(\beta)}(y)| \leq \|f^{(\beta+1)}\|_\infty |x-y| \leq \sum\limits_{\gamma\leq k} \|f^{(\gamma)}\|_\infty \times |x-y|$

d'où : $\|f^{(\beta)}\|_\alpha \le C\|f^{(\beta)}\|_\infty + \sum_{\gamma\le k}\|f^{(\gamma)}\|_\infty \times \sup_{\substack{x\ne y\\ |x-y|\le 1}} |x-y|^{1-\alpha}$

$$\le C\|f^{(\beta)}\|_\infty + \sum_{\gamma\le k}\|f^{(\gamma)}\|_\infty$$

$$\le (C+1)\sum_{\gamma\le k}\|f^{(\gamma)}\|_\infty$$

Ainsi, $\|f\|_{k,\alpha} = \sum_{\beta\le k-1}\|f^{(\beta)}\|_\alpha + \|f^{(k)}\|_\alpha$

$$\le \Big(\sum_{\beta\le k-1}(C+1)\sum_{\gamma\le k}\|f^{(\gamma)}\|_\infty\Big) + \|f^{(k)}\|_\infty + \sup_{x\ne y}\frac{|f^{(k)}(x)-f^{(k)}(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

ne dépend pas de β

$$\le [k(C+1)+1]\sum_{\gamma\le k}\|f^{(\gamma)}\|_\infty + [k(C+1)+1]\sup_{x\ne y}\frac{|f^{(k)}(x)-f^{(k)}(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

$$\le [k(C+1)+1]\,\|f\|_{k,\alpha}$$

Théorème : (1) Si $k+\alpha > k'+\alpha'$, alors $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)\subseteq \mathcal{C}^{k',\alpha'}(\Omega)$ et l'inclusion est continue.
(2) Si Ω ouvert borné, alors l'injection de $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)$ dans $\mathcal{C}^{k',\alpha'}(\Omega)$ est compacte.
(3) Si Ω ouvert borné, alors $\forall \varepsilon>0, \exists C_\varepsilon>0 \mid$
$\|f\|_{k',\alpha'} \le \varepsilon\|f\|_{k,\alpha} + C_\varepsilon\|f\|_\infty, \quad \forall f\in \mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)$
(4) $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)$ est une algèbre multiplicative.
i.e. $\forall u,v\in\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)$, $uv\in\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)$ et $\|uv\|_{k,\alpha}\le C\|u\|_{k,\alpha}\|v\|_{k,\alpha}$

Preuve : (1) $k+\alpha>k'+\alpha'$ ssi $k>k'$ ou ($k=k'$ et $\alpha>\alpha'$)
En effet, on ne peut pas avoir $k<k'$ car sinon
$k+\alpha \lneq k+1 \le k' \le k'+\alpha'$ ABSURDE
- Si $k>k'$, alors $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)\subseteq \mathcal{C}^{k}_b(\Omega)\subseteq \mathcal{C}^{k'+1}(\Omega)\subseteq \mathcal{C}^{k',\alpha'}(\Omega)$
- Si $k=k'$, alors $\alpha\ge\alpha'$ et $|x-y|^\alpha \le |x-y|^{\alpha'}$
  (i) Si $|x-y|\ge 1$, alors $|f(x)-f(y)|\le 2\|f\|_\infty \le 2\|f\|_\infty |x-y|^{\alpha'}$
  (ii) Si $|x-y|<1$, alors OK par l'inégalité.

(2) Résulte de l'inclusion compacte.
(3) On a : $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)\subseteq\mathcal{C}^{k',\alpha'}(\Omega)\subseteq L^\infty(\Omega)$ avec la première inclusion compacte et la deuxième continue.
Supposons par l'absurde que : $\exists \varepsilon_0>0 \mid \forall C>0, \exists u\in\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega) \mid$
$$\|u\|_\alpha > \varepsilon_0\|u\|_{\alpha'} + C\|u\|_\infty$$
En prenant $C=1;2;\dots$, on construit une suite $(u_n)\in \mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)^{\mathbb{N}}$ telle que : $\|u_n\|_{\alpha'} > \varepsilon_0\|u_n\|_\alpha + n\|u_n\|_\infty$
En particulier, $\|u_n\|_{\alpha'}>0$. Soit alors $\left(v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\|v_n\|_\alpha = 1$, $\|v_n\|_{\alpha'} > \varepsilon_0 + n\|v_n\|_\infty$
i.e. $\|v_n\|_\infty + \frac{\varepsilon_0}{n} < \frac{1}{n}\|v_n\|_{\alpha'}$.
Par inclusion compacte, il existe $v_{\varphi(n)} \xrightarrow[+\infty]{} v\in\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)$
et par inclusion continue, $v_{\varphi(n)}\xrightarrow[+\infty]{} v\in L^\infty(\Omega)$
Ainsi, $\|v_{\varphi(n)}\|_{\alpha'} \to \|v\|_{\alpha'}$ et $\|v_{\varphi(n)}\|_\infty \to \|v\|_\infty$
Par la dernière inégalité, $v=0$
ABSURDE car $\|v_{\varphi(n)}\|_{\alpha'} > \varepsilon_0 > 0$

(4) Compliqué. (utilise la formule de Leibniz)