131 développements pour l'oral - Lesesvre

Théorèmes de Choquet et de Birkhoff

181 203 219 253

Définition : Soit K convexe. On dit que $x \in K$ est un point extrémal de K si :
$\forall a, b \in K, \forall \lambda \in [0;1], x = \lambda a + (1-\lambda) b \Rightarrow a = b$ ou $\lambda \in \{0;1\}$
On note $\mathcal{E}(K)$ leur ensemble.

Théorème : (de Krein-Milman) Soit E espace euclidien, $K \subseteq E$ convexe, compact, non-vide.
Alors : K est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux

Théorème : (de Choquet) Soit E espace euclidien, $K \subseteq E$ convexe, compact tq : $\mathcal{E}(K)$ compact, $\ell : E \to \mathbb{R}$ fonction linéaire, continue sur E.
Alors : ℓ atteint un minimum sur K en un point extrémal de K

Preuve : oral

L'idée pour ce développement est de créer une suite (ℓ_n) convergeant uniformément vers ℓ pour montrer que :
(1) Chaque ℓ_n atteint un minimum sur K en un point extrémal de K
(2) La limite d'une sous-suite de ces points minimise ℓ et est dans $\mathcal{E}(K)$.

Soit $(\ell_n := \ell - \frac{1}{n}\|\cdot\|^2)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions continues, convergeant uniformément vers ℓ (car K est compact).
Puisque chaque ℓ_n est continue sur K compact, soit $x_n \in K$ tel que $\ell_n(x_n)$ est un minimum.

① Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in \mathcal{E}(K)$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons par l'absurde que $x_n \notin \mathcal{E}(K)$.
Par le théorème de Krein-Milman,
$\exists y_1, \dots, y_k \in \mathcal{E}(K)^k \mid \exists (\lambda_i)_{i=1}^k \in]0;1[^k \mid$
$\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ et $x_n = \sum_{i=1}^k \lambda_i y_i$

Or : ℓ_n est strictement concave.

En effet, $\forall x \in E$, $d_x(d(\ell_n)) \leq 0$ car :
∘ $d_x(\ell) : \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ h \mapsto \ell(h) \end{array}$ donc $d(\ell) : \begin{array}{l} E \to \mathcal{L}(E;\mathbb{R}) \\ x \mapsto \left[\begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ h \mapsto \ell(h) \end{array}\right] \end{array}$
car on différencie une application constante donc $d_x(d(\ell)) : \begin{array}{l} E \to \mathcal{L}(E;\mathbb{R}) \\ h \mapsto 0 \end{array}$

∘ $d_x(\|\cdot\|^2) : \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ h \mapsto 2\langle x ; h \rangle \end{array}$ donc $d(\|\cdot\|^2) : \begin{array}{l} E \to \mathcal{L}(E;\mathbb{R}) \\ x \mapsto \left[\begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ h \mapsto 2\langle x ; h \rangle \end{array}\right] \end{array}$
car $d(\|\cdot\|^2)$ est linéaire en x donc $d_x(d(\|\cdot\|^2)) : \begin{array}{l} E \to \mathcal{L}(E;\mathbb{R}) \\ k \mapsto \left[\begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ h \mapsto 2\langle k ; h \rangle \end{array}\right] \end{array}$
Ainsi, $d_x(d(\ell_n)) : \begin{array}{l} E \to \mathcal{L}(E;\mathbb{R}) \\ k \mapsto \left[\begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ h \mapsto -2\langle k ; h \rangle \end{array}\right] \end{array}$ qui est strictement négative ssi $k \neq 0$ et négative ssi $k = 0$

Par stricte concavité, $\ell_n(x_n) = \ell_n\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i y_i\right) > \sum_{i=1}^k \lambda_i \ell_n(y_i)$
mais ceci nécessiterait que : $\exists i \in [\![1;k]\!] \mid \ell_n(y_i) < \ell_n(x_n)$

En effet, supposons par l'absurde que $\forall i \in [\![1;k]\!]$, $\ell_n(y_i) \geq \ell_n(x_n)$ alors $\sum_{i=1}^k \lambda_i \ell_n(y_i) \geq \max_{i \in [\![1;k]\!]} \{\ell_n(y_i)\} \times \sum_{i=1}^k \lambda_i \geq \ell_n(x_n)$
ABSURDE. Alors : $\exists i \in [\![1;k]\!] \mid \ell_n(y_i) < \ell_n(x_n)$

CONTREDIT la minimalité de x_n.
Alors $x_n \in \mathcal{E}(K)$.

② Par compacité de $\mathcal{E}(K)$, il existe une sous-suite de (x_n) convergente (que l'on note toujours (x_n)) : $x_n \xrightarrow[+\infty]{} x \in \mathcal{E}(K)$

Montrons que x minimise ℓ.
Soit $\varepsilon > 0$.
∘ Par continuité de ℓ, $\exists n_1 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_1$, $|\ell(x_n) - \ell(x)| \leq \varepsilon$
∘ Par convergence uniforme de ℓ_n vers ℓ, $\exists n_2 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_2$, $|\ell_n(x_n) - \ell(x_n)| \leq \varepsilon$

Soit $N = \max(n_1 ; n_2)$. Ainsi, $\forall n \geq N$,
$|\ell_n(x_n) - \ell(x)| \leq |\ell_n(x_n) - \ell(x_n)| + |\ell(x_n) - \ell(x)| \leq 2\varepsilon$
Ainsi, $\ell_n(x_n) \xrightarrow[+\infty]{} \ell(x)$.
Or : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall y \in K, \quad \ell_n(x_n) \leq \ell_n(y)$

$$\begin{array}{ccc} \ell_n(x_n) & \leq & \ell_n(y) \\ \downarrow_{+\infty} & & \downarrow_{+\infty} \\ \ell(x) & \leq & \ell(y) \end{array}$$

Ainsi, x minimise ℓ.

Temps : 14'30" speed (oral)

Théorème : (de Birkhoff) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $B_n := \{A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_n([0,1]) \mid \forall i,j\in[\![1;n]\!], \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1\}$

Alors : les points extrémaux de B_n sont les matrices de permutations i.e. $\mathcal{E}(B_n) = P_\sigma$

Preuve :

oral

L'idée pour ce développement est de montrer une double inclusion :
(1) Montrer que $P_\sigma \subseteq \mathcal{E}(B_n)$
(2) Montrer que $P_\sigma^c \subseteq \mathcal{E}(B_n)^c$

(1) Montrons que $P_\sigma \subseteq \mathcal{E}(B_n)$

Soit $P\in P_\sigma$, $A,B\in B_n$ et $\lambda\in]0;1[$ tels que :

$$P=\lambda A+(1-\lambda)B$$

Soit $i,j\in[\![1;n]\!]$. Alors :

- Si $0=\lambda a_{i,j}+(1-\lambda)b_{i,j}$, alors $a_{i,j}=b_{i,j}=0$ car $a_{i,j}, b_{i,j}\geq 0$ et $\lambda,1-\lambda>0$
- Si $1=\lambda a_{i,j}+(1-\lambda)b_{i,j}$, alors $a_{i,j}=b_{i,j}=1$ car $a_{i,j}, b_{i,j}\leq 1$ et $\lambda,1-\lambda<1$

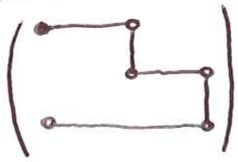
Alors $A=B=P$ et $P_\sigma \subseteq \mathcal{E}(B_n)$.

(2) Montrons que $P_\sigma^c \subseteq \mathcal{E}(B_n)^c$

Soit $A=(a_{i,j})\in B_n\cap P_\sigma^c$.
Ainsi, $\exists a_{i_0,j_0}\in]0;1[$.
Montrons que $A\notin\mathcal{E}(B_n)$.

oral

Puisque $A\in B_n$, $\exists a_{i_0,j_1}\in]0;1[$ | coefficient sur la même ligne i_0, de colonne $j_1\neq j_0$.
De même, $\exists a_{i_1,j_1}\in]0;1[$ | coefficient sur la même colonne j_1, de ligne $i_1\neq i_0$.
On obtient, en itérant, une suite $(a_{i_r,j_r})_{r\in\mathbb{N}}\in]0;1[^{\mathbb{N}}$.
Le nombre de coefficients de A étant fini, le principe des tiroirs assure que apcr $k\in\mathbb{N}$, on retombe sur un coefficient déjà rencontré.

$A =$ 

Soit $\varepsilon>0$ tel que $0<\varepsilon<\min\limits_{\substack{i,j\in[\![1;n]\!]\\ a_{i,j}\notin\{0;1\}}} \{\min(a_{i,j};1-a_{i,j})\}$

Alors, $\forall r\in\mathbb{N}$, $a_{i_r,j_r}\pm\varepsilon\in]0;1[$.

oral

Soit alors A^+ obtenue par : $\forall r\in[\![1;k-1]\!]$
$a^+_{i_r,j_r}=a_{i_r,j_r}+\varepsilon$ et $a^+_{i_r,j_{r+1}}=a_{i_r,j_{r+1}}-\varepsilon$
d'où $A^+\in B_n$.
De même, soit A^- en remplaçant ε par $-\varepsilon$.

$$A^+=\begin{pmatrix} \bullet+\varepsilon & \bullet-\varepsilon & \\ & \bullet+\varepsilon & \bullet-\varepsilon \\ \bullet-\varepsilon & & \bullet+\varepsilon \end{pmatrix} \quad A^-=\begin{pmatrix} \bullet-\varepsilon & \bullet+\varepsilon & \\ & \bullet-\varepsilon & \bullet+\varepsilon \\ \bullet+\varepsilon & & \bullet-\varepsilon \end{pmatrix}$$

Ainsi, $A=\frac{1}{2}(A^++A^-)$ est combinaison convexe non-triviale de deux matrices de B_n.
Alors $A\notin\mathcal{E}(B_n)$.

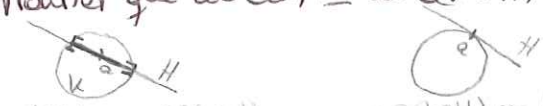
Théorème : (de Krein-Milman) Soit K convexe, compact non-vide de E espace euclidien.

Alors : K est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

Preuve : (idée)

(1) Montrer le lemme : soit $c\in\partial K$.
Alors : $\exists H\subset K$ | H hyperplan d'appui de K en c (i.e. hyperplan affine de E passant par c) tel que, K est contenu dans l'un des demi-espaces fermés délimités par H.

(2) Soit $a\in K$ tel que : $a\in H$ avec H hyperplan d'appui de K.
Montrer que $a\in\mathcal{E}(K)$ ssi $a\in\mathcal{E}(K\cap H)$



$a\notin\mathcal{E}(K)$ car $a\notin\mathcal{E}(K\cap H)$ $\qquad$ $a\in\mathcal{E}(K\cap H)$ car $K\cap H=\{a\}$

(3) Montrer le résultat par récurrence sur p la dimension du sous-espace affine engendré par K.

- Initialisation : Pour $p=0$, K est un singleton. OK
- Hérédité : Soit $p\in\mathbb{N}$. Supposons le résultat vrai pour tout K de dimension $\leq p-1$.
  Soit K convexe, compact qui engendre un sous-espace de dimension p. Quitte à translater K et remplacer E par un sous-espace vectoriel, ops $p=\dim(E)$.
  Soit $c\in K$
  - Si $c\in\partial K$, alors par le lemme, soit $K'=K\cap H$ convexe compact qui engendre un sous-espace de dimension $p-1$. Par hypothèse de récurrence, $K\cap H=\mathrm{Conv}(\mathcal{E}(K\cap H))=\mathrm{Conv}(\mathcal{E}(K))$ et $c\in K\cap H$
    Alors $c\in\mathcal{E}(K\cap H)$
  - Si $c\in\mathring{K}$, alors soit D droite passant par c. $D\cap K$ est convexe, compact et $D\cap K=[a;b]$ avec $a,b\in\partial K$. Alors c est barycentre à coeffs positifs de points extrémaux.

Temps : 14' 50"