OA - Bech (p. 140)

Densité des polynômes orthogonaux

201 207 213 234 239 245 250 235

Définitions: Soit $(H;\langle;\rangle)$ un espace de Hilbert.
On dit que $(e_i)_{i\in I}\in H^I$ est une base hilbertienne de H si elle est:
(1) Orthogonale: $\forall i\neq j,\ \langle e_i;e_j\rangle=0$
(2) Normée: $\forall i\in I,\ \langle e_i;e_i\rangle=1$
(3) Totale: $H=\overline{\mathrm{Vect}(e_i\mid i\in I)}$

Soit $I\subset\mathbb{R}$ intervalle. On appelle fonction poids une fonction $\rho: I\to\mathbb{R}$ mesurable, strictement positive telle que: $\forall n\in\mathbb{N},\ \int_I |x|^n\rho(x)dx<+\infty$.

On note $L^2(I;\rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue muni du produit scalaire:
$$\langle f;g\rangle_\rho=\int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)dx$$
On appelle famille des polynômes orthogonaux associés à ρ la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ issue du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliqué à la famille $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Théorème: Soit $I\subset\mathbb{R}$ intervalle, ρ fonction poids telle que: $\exists a>0\mid \int_I e^{a|x|}\rho(x)dx<+\infty$
Alors: la famille des polynômes orthogonaux associés à ρ: $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une base hilbertienne de $L^2(I;\rho)$.

Preuve:

oral

Les conditions (1) et (2) étant vérifiées, il s'agit de montrer que la famille (P_n) est totale.
Pour cela on considérera une transformée de Fourier et des fonctions holomorphes avec pour résultats clés le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale et le théorème de prolongement analytique.

① (P_n) est bien définie et $\mathrm{Vect}((P_n)_{n\in\mathbb{N}})=\mathrm{Vect}(x\mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ car $|x|^n\underset{+\infty}{=}O(e^{a|x|})$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ x\mapsto x^n\in L^1(I;\rho)$
$x\mapsto x^n\in L^2(I;\rho)$ pour les mêmes raisons.

② Soit $f\in L^2(I;\rho)\cap \mathrm{Vect}((P_n)_{n\in\mathbb{N}})^\perp$ et $\varphi: \begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto f(x)\rho(x)\mathbb{1}_I(x)\end{array}$
Remarquons que: $\forall t\geq0,\ t\leq\frac{1+t^2}{2}$.
Ainsi, $\forall x\in I,\ |\varphi(x)|\leq|f(x)|\rho(x)\leq\frac{1+f(x)^2}{2}\rho(x)$
donc: $\int_I|\varphi(x)|dx\leq\frac12\left[\int_I\rho(x)dx+\int_I|f(x)|^2\rho(x)dx\right]<+\infty$
Alors: $\varphi\in L^1(\mathbb{R})$.

③ Soit alors $\hat\varphi: \begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{C}\\ \omega\mapsto\int_I e^{-ix\omega}f(x)\rho(x)dx\end{array}$ et
$\mathcal{B}_a:=\{z\in\mathbb{C}\mid |\mathrm{Im}(z)|<\frac a2\}$.
Montrons que $\hat\varphi$ est prolongeable sur $\mathcal{B}_a$ en une fonction holomorphe F.

Soit $g: \begin{array}{l}\mathbb{C}\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}\\ (z;x)\mapsto e^{-ixz}f(x)\rho(x)\mathbb{1}_{\mathcal{B}_a\times I}(z;x)\end{array}$
(i) $\forall z\in\mathcal{B}_a$, $x\mapsto g(z;x)$ est mesurable sur I
(ii) $\forall x\in I$, $z\mapsto g(z;x)$ est holomorphe sur $\mathcal{B}_a$.
(iii) $\forall z\in\mathcal{B}_a,\ \forall x\in I,\ |g(z;x)|\leq e^{a\frac{|x|}{2}}|f(x)|\rho(x)=:h(x)$
Or: $\int_I|h(x)|dx\leq\left(\int_I e^{a|x|}\rho(x)dx\right)^{\frac12}\left(\int_I|f(x)|^2\rho(x)dx\right)^{\frac12}<+\infty$
(par le théorème de Cauchy-Schwarz)
Par le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale,
$F: \begin{array}{l}\mathcal{B}_a\to\mathbb{C}\\ z\mapsto\int_I e^{-ixz}f(x)\rho(x)dx\end{array}$ est holomorphe sur $\mathcal{B}_a$ et coïncide avec $\hat\varphi$ sur $\mathbb{R}$.

④ On a même mieux:
$$\forall n\in\mathbb{N},\ F^{(n)}(0)=\int_I\frac{d^n}{dz^n}\left[e^{-ixz}f(x)\rho(x)\right](0)dx$$
$$=(-i)^n\int_I x^n f(x)\rho(x)dx$$
$$=(-i)^n\langle f;x\mapsto x^n\rangle_\rho$$
$$=0$$
Par unicité du développement en série entière de F assure que $F=0$ sur un voisinage de 0.
Ce dernier étant un ouvert non-vide de l'ouvert connexe $\mathcal{B}_a$, par le théorème de prolongement analytique, $F=0$ sur $\mathcal{B}_a$ tout entier.
En particulier, $\hat\varphi=0$ sur $\mathbb{R}$ et par injectivité de la transformée de Fourier sur L^1, $\varphi=0$.
Comme $\rho>0$, on a $f=0$ presque partout.

⑤ Ainsi, $\mathrm{Vect}((P_n)_{n\in\mathbb{N}})^\perp=\{0\}$ et donc $L^2(I;\rho)=\overline{\mathrm{Vect}((P_n)_{n\in\mathbb{N}})}$
(P_n) forme bien une base hilbertienne de $L^2(I;\rho)$.

Contrexemple: L'hypothèse sur ρ est vitale.
Soit $w: \begin{array}{l}\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^{-\ln(x)}\end{array}$.
Alors: la famille des polynômes orthogonaux $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à w ne forme pas une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}_+;w)$.

Preuve:
Soit $f: \begin{array}{l}\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin[2\pi\ln(x)]\end{array}$

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \langle f; x\mapsto x^n\rangle_w = \int_0^{+\infty} x^n \sin(2\pi\ln(x))\, x^{-\ln(x)}\,dx$$
$$= \int_0^{+\infty} e^{(n+1)\ln(x)} \sin(2\pi\ln(x))\, e^{-\ln(x)^2}\,\frac{dx}{x}$$

$y=\ln(x)$, $dy=\frac{dx}{x}$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(n+1)y}\sin(2\pi y)\,e^{-y^2}\,dy$$
$$= e^{\frac{(n+1)^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(2\pi y)\,e^{-(y-\frac{n+1}{2})^2}\,dy$$

$t=y-\frac{n+1}{2}$, $dt=dy$
$$= e^{\frac{(n+1)^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin[2\pi t+\pi(n+1)]\,e^{-t^2}\,dt$$
$$= (-1)^{n+1}e^{\frac{(n+1)^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(2\pi t)\,e^{-t^2}\,dt$$
$= 0$ (par imparité de sin et par parité de $t\mapsto e^{-t^2}$)

Ainsi, $0\neq f\in \mathrm{Vect}((P_n)_{n\in\mathbb{N}})^\perp$ et alors la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas totale.

Théorème: (Inégalité de Hölder) Soit $f,g\in L^1(X)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
Alors: $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p\|g\|_q$

Preuve:
▪ Inégalité de Young: $u^\alpha v^{1-\alpha}\leq \alpha u+(1-\alpha)v$
Soit $\alpha\in]0,1[$, $x\in\mathbb{R}_+$, $\varphi_\alpha(x)=x^\alpha-\alpha x$

x	0		1		$+\infty$
$sg(\varphi_\alpha')$		$+$	0	$-$	
φ_α	0	$\nearrow$	$\varphi_\alpha(1)$	$\searrow$	$-\infty$

Ainsi, $\varphi_\alpha'(x)=\alpha(x^{\alpha-1}-1)$
Alors $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $\varphi_\alpha(x)\leq\varphi_\alpha(1)$.
i.e. $x^\alpha\leq \alpha x+1-\alpha$ $\frac{u^\alpha}{v^\alpha}\leq\frac{\alpha u}{v}+\frac{(1-\alpha)v}{v}$
En prenant $x=\frac{u}{v}$, on a: $u^\alpha v^{1-\alpha}\leq\alpha u+(1-\alpha)v$.

▪ • Si $\|f\|_p=0$ ou $\|f\|_p=+\infty$ ou $\|g\|_p=0$ ou $\|g\|_p=+\infty$ OK
• Sinon, soit $\alpha=\frac{1}{p}$ d'où: $1-\alpha=\frac{1}{q}$,
$u:=\frac{f^p(x)}{\|f\|_p^p}$, $v:=\frac{g^q(x)}{\|g\|_q^q}$
d'où: $\frac{f(x)g(x)}{\|f\|_p\|g\|_q}\leq\frac{1}{p}\frac{f^p(x)}{\|f\|_p^p}+\frac{1}{q}\frac{g^q(x)}{\|g\|_q^q}$
En intégrant de chaque côté, on a: $\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p\|g\|_q}\leq 1$

Théorème: (développement en série entière) Soit $f\in\mathcal{H}(D(a;\rho))$
Alors: $\exists (a_n)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall z\in D(a;\rho),\ f(z)=\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(z-a)^n$

Preuve:
Par translation, on se ramène à $a=0$. Soit $z\in D(0;r)$, $r<\rho$.
Par la formule de Cauchy, $f(z)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(0;r)}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$
$$=\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(0;r)}\frac{f(\xi)}{1-\frac{z}{\xi}}\times\frac{d\xi}{\xi}$$
Par ailleurs, $\frac{1}{1-\frac{z}{\xi}}=\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{z}{\xi}\right)^n$

Ainsi, $f(z)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(0;r)}\frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}d\xi\right)z^n$ (la série converge normalement sur tout compact d'où l'interversion $\sum$-$\int$).
d'où: $f(z)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$

Théorème: (de prolongement analytique) Soit Ω ouvert, connexe, $f,g\in\mathcal{H}(\Omega)$ qui coïncident sur $A\subseteq\Omega$ ouvert non-vide.
Alors: $f=g$ sur Ω.

Preuve:
Soit $u:=f-g$ et $A:=\{z\in\mathbb{C}\mid\forall n\in\mathbb{N},\ u^{(n)}(z)=0\}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}{u^{(n)}}^{-1}(\{0\})$ fermé car les $u^{(n)}$ sont continues.
Soit $z_0\in A$ et $D\subseteq\Omega$ disque ouvert contenant z_0.
Puisque $u(z)=\sum\frac{u^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ sur ce disque, $u=0$ sur D.
Ainsi, $D\subseteq A$ et ceci étant vrai pour tout point de A, A est alors un ouvert de Ω.
Par connexité de Ω et puisque $A\neq\emptyset$, on a: $A=\Omega$.

Théorème: $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R})\to\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est injective

Preuve:
Puisque $\mathcal{F}$ est linéaire, vérifions que $\ker(\mathcal{F})=\{0\}$.
Soit $f\in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}(f)=0\in L^1(\mathbb{R})$.
Par le théorème d'inversion, $f=\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f))=\overline{\mathcal{F}}(0)=0$.

Théorème: (1) Tout espace de Hilbert a une base hilbertienne.
(2) Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne dénombrable.

Preuve:
(1) Lemme de Zorn
(2) Par séparabilité, $\exists (x_n)\in H^{\mathbb{N}}\mid \mathrm{Vect}((x_n))$ dense dans H.
Soit $\forall n\in\mathbb{N}$, $F_n=\mathrm{Vect}(x_0;\dots;x_n)$. Soit $y_0=x_0$ et $(y_n)\in H^{\mathbb{N}}$ famille obtenue à partir du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
Ainsi, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\mathrm{Vect}(y_0;\dots;y_n)=F_n$ et $\forall n\neq m$, $\langle y_n;y_m\rangle=0$.
Soit $D=\{n\in\mathbb{N}\mid y_n\neq 0\}$. Ainsi,
$\mathrm{Vect}(\{y_n\mid n\in D\})=\mathrm{Vect}(\{y_n\mid n\in\mathbb{N}\})=\mathrm{Vect}(\{x_n\mid n\in\mathbb{N}\})$
Ainsi, $\mathrm{Vect}(\{y_n\mid n\in D\})$ est dense dans H.
Comme H est de dimension infinie, D est dénombrable et (y_n) est une base hilbertienne de H.

Entraînements:
15'06" [illegible]
14'30"
14'14" speechless