Analyse pour l'agrégation
- Bernis

Inégalité de Hoeffding

219 262 266
229 264
261 265

Lemme : Soit X v.a. réelle, bornée par 1 p.s., centrée
Alors : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \mathbb{E}[\exp(tX)] \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$

Preuve :

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in [-1;1]$. On a $\begin{cases} 0 \leq \frac{1}{2}(1-x) \leq 1 \\ 0 \leq \frac{1}{2}(1+x) \leq 1 \\ \frac{1}{2}(1-x) + \frac{1}{2}(1+x) = 1 \end{cases}$

De plus, $tx = \frac{1}{2}(1-x) \times (-t) + \frac{1}{2}(1+x)t$

La fonction $x \mapsto \exp(tx)$ étant convexe,

$\exp(tx) \leq \frac{1}{2}(1-x)\exp(-t) + \frac{1}{2}(1+x)\exp(t)$

X est p.s. bornée par 1 et alors $\exp(tX)$ est bornée p.s. et admet une moyenne.

$\mathbb{E}[\exp(tX)] \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}[1-X]\exp(-t) + \frac{1}{2}\mathbb{E}[1+X]\exp(t)$

X est centrée d'où :

$\mathbb{E}[\exp(tX)] \leq \frac{1}{2}[\exp(-t) + \exp(t)] = ch(t)$

Or : $ch(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$ et $\exp\left(\frac{t^2}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{n! 2^n}$

Mais : $n! 2^n = 2 \times 4 \times \dots \times 2n \leq (2n)!$
on distribue les 2

Ainsi, $ch(t) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$ et $\mathbb{E}[\exp(tX)] \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$.

Théorème : (inégalité de Hoeffding) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de v.a. réelles indépendantes, centrées, bornées p.s. : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists c_n > 0 \mid |X_n| \leq c_n$ et soit $\left(S_n = \sum_{j=1}^n X_j\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
Alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{j=1}^n c_j^2}\right)$

Preuve :

oral

> L'idée pour ce développement est d'obtenir une première inégalité grâce au lemme, puis de l'améliorer par l'inégalité de Markov pour finalement l'optimiser par une étude de fonction.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}_+^*$

1. Donnons une majoration de $\mathbb{E}[\exp(tS_n)]$.

$\frac{X_n}{c_n}$ est bornée p.s. par 1 et centrée. Par le lemme :

$\forall t' \in \mathbb{R}_+^*, \mathbb{E}\left[\exp\left(t'\frac{X_n}{c_n}\right)\right] \leq \exp\left(\frac{t'^2}{2}\right)$

Pour $t' = tc_n$, on a : $\mathbb{E}[\exp(tX_n)] \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}c_n^2\right)$.

Ainsi, $\mathbb{E}[\exp(tS_n)] = \prod_{j=1}^n \mathbb{E}[\exp(tX_j)]$ car les $\exp(tX_n)$ sont indépendants

$\leq \prod_{j=1}^n \exp\left(\frac{t^2}{2}c_j^2\right)$

$\leq \exp\left[\frac{t^2}{2}\sum_{j=1}^n c_j^2\right]$

2. Soit $\varepsilon > 0$. La fonction $x \mapsto \exp(tx)$ étant croissante, $(S_n > \varepsilon) \subseteq (\exp(tS_n) > \exp(t\varepsilon))$ d'où :

$\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(\exp(tS_n) > \exp(t\varepsilon))$

$\leq \frac{\mathbb{E}[\exp(tS_n)]}{\exp(t\varepsilon)}$ par l'inégalité de Markov

$\leq \exp\left[\sum_{j=1}^n c_j^2 \frac{t^2}{2} - t\varepsilon\right]$

3. Soit $a = \sum_{j=1}^n c_j^2$

La fonction $t \mapsto \frac{a}{2}t^2 - \varepsilon t$ atteint son minimum en $-\frac{\varepsilon^2}{2a}$ pour $t = \frac{\varepsilon}{a} > 0$.

L'exponentielle étant strictement croissante,

$\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp\left[-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{j=1}^n c_j^2}\right]$

4. Puisque $(|S_n| > \varepsilon) = (S_n > \varepsilon) \sqcup (-S_n > \varepsilon)$, on a :

$\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq 2\exp\left[-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{j=1}^n c_j^2}\right]$

Application : Soit $(X_i)_{i=1}^n$ v.a. iid de même loi $X_1 \sim \mathcal{B}(1;p)$ avec $p \in]0;1[$, soit $\alpha \in]0;1[$.
Alors : un intervalle de confiance par excès au niveau $1-\alpha$ du paramètre p est : $\left[\frac{1}{n}S_n - \sqrt{\frac{2}{n}\ln\left(\frac{2}{\alpha}\right)}; \frac{1}{n}S_n + \sqrt{\frac{2}{n}\ln\left(\frac{2}{\alpha}\right)}\right]$.

Preuve :

On applique l'inégalité de Hoeffding à $(X_n - p)_n$ qui est bien bornée par 1

$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}S_n - p\right| > \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\left|\sum_{k=1}^n (X_k - p)\right| > n\varepsilon\right) \leq 2\exp\left(-\frac{n^2\varepsilon^2}{2n}\right)$

Soit $\varepsilon' = \sqrt{\frac{2}{n}\ln\left(\frac{2}{\alpha}\right)}$ tel que $\alpha = 2\exp\left(-\frac{n\varepsilon'^2}{2}\right)$ d'où :

$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}S_n - p\right| < \varepsilon'\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}S_n - p\right| > \varepsilon'\right) \geq 1 - \alpha$

d'où l'intervalle cherché.

Application : Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n c_k^2 \leq n^{2\alpha - \beta}$

Alors : $\frac{S_n}{n^\alpha} \xrightarrow[+\infty]{p.s.} 0$

Preuve :

Soit $\varepsilon > 0$. L'inégalité de Hoeffding donne :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(|S_n| > n^\alpha \varepsilon) \leq 2\exp\left(-\frac{n^{2\alpha}\varepsilon^2}{2\sum_{k=1}^n c_k^2}\right)$

$\leq 2\exp\left(-\frac{n^\beta \varepsilon^2}{2}\right)$

Or : $\exp\left(-\frac{n^{\beta}\varepsilon^{2}}{2}\right) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{2}}\right)$. Ainsi,

$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|S_n| > n^{\alpha}\varepsilon)$ converge.

Par le lemme de Borel-Cantelli, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{+\infty}\left\{\left|\frac{S_n}{n^{\alpha}}\right| > \varepsilon\right\}\right) = 0$$

En particulier, $\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$,

$$1 = \mathbb{P}\left(\liminf\left\{\left|\frac{S_n}{n^{\alpha}}\right| \leq \varepsilon\right\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\bigcap_{m\geq n}\left\{\left|\frac{S_m}{m^{\alpha}}\right| \leq \varepsilon\right\}\right)$$

ie $\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$, on dispose d'un ensemble $F_{\varepsilon} \in \mathcal{F}$ de mesure pleine tel que $\forall \omega \in F_{\varepsilon}$, $\exists n \in \mathbb{N}^* \mid \forall m \geq n$, $\left|\frac{S_m(\omega)}{m^{\alpha}}\right| \leq \varepsilon$

Soit $F = \bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*} F_{\varepsilon}$ de mesure pleine par dénombrabilité de $\mathbb{Q}$. Par contraposée, soit $O_n \in \mathcal{F}$ de mesure nulle. Alors $\mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(O_n) = 0$.

Alors : $\forall \omega \in F$, $\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$, $\exists n \in \mathbb{N}^* \mid \forall m \geq n$, $\left|\frac{S_m(\omega)}{m^{\alpha}}\right| \leq \varepsilon$

ε étant quelconque, $\frac{S_n}{n^{\alpha}} \xrightarrow[+\infty]{p.s.} 0$

L'astuce utilisée est : prendre ε dans $\mathbb{Q}$ (au lieu de $\mathbb{R}$) qui est dénombrable pour permettre de transformer : "$\forall \varepsilon$, p.s." en "p.s. $\forall \varepsilon$".

Temps : 12'03'' [illegible]