Processus de Galton - Watson

<u>Théorème :</u> Soit $(\xi_i^{(n)})_{i \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}}$, une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées. On définit la suite (Z_n) de variables aléatoires par : $\begin{cases} Z_0 = 1 \\ Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_i^{(n)} \text{ pour } n \geqslant 0 \end{cases}$

On pose $m = \mathbb{E}[\xi_1^{(0)}]$. On définit l'évènement d'extinction, noté ext, comme étant $\{\exists n > 0, Z_n = 0\}$. Alors :

- si $m \leqslant 1$ et $\xi_1^{(0)}$ n'est pas presque sûrement égale à 1, $\mathbb{P}(\text{ext}) = 1$;
- si $m > 1$ ou $\xi_1^{(0)}$ est presque sûrement égale à 1, $\mathbb{P}(\text{ext}) \in [0, 1[$.

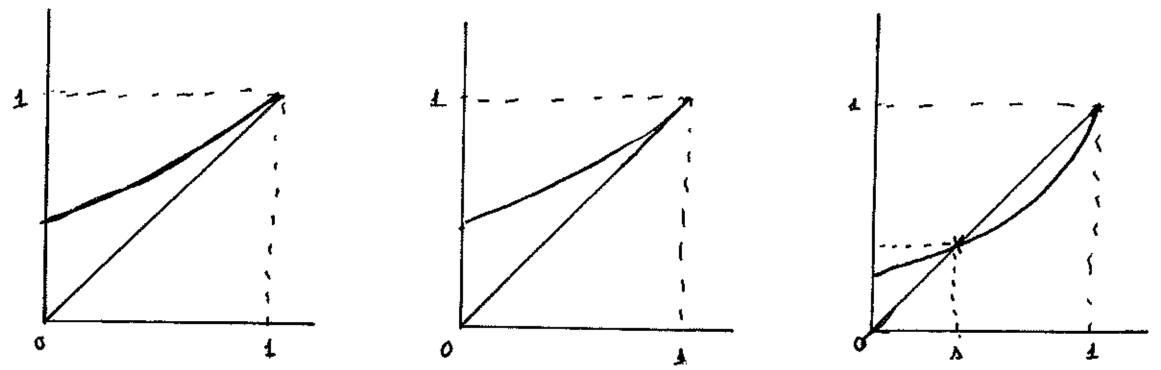
<u>Démonstration :</u> Soit $G : z \longmapsto \mathbb{E}[z^{\xi_1^{(0)}}] = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\xi_1^{(0)} = k) z^k$ la fonction caractéristique de $\xi_1^{(0)}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note G_n la fonction caractéristique de Z_n.

On a $G_0 : z \longmapsto z$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $z \in [0, 1]$. On a :

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(z) = \mathbb{E}[z^{Z_{n+1}}] &= \mathbb{E}\left[z^{\sum_{i=1}^{Z_n} \xi_i^{(n)}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[z^{\sum_{N \geqslant 0} \left(\sum_{i=1}^{N} \xi_i^{(n)}\right) \mathbb{1}_{\{Z_n = N\}}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{N \geqslant 0} z^{\sum_{i=1}^{N} \xi_i^{(n)}} \mathbb{1}_{\{Z_n = N\}}\right] \\
&= \sum_{N \geqslant 0} \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{N} z^{\xi_i^{(n)}} \mathbb{1}_{\{Z_n = N\}}\right] \quad \text{par Fubini - Tonelli} \\
&= \sum_{N \geqslant 0} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{Z_n = N\}}] \prod_{i=1}^{N} \underbrace{\mathbb{E}[z^{\xi_i^{(n)}}]}_{= G(z)} \quad \text{par indépendance} \\
&= \sum_{N \geqslant 0} \mathbb{P}(Z_n = N) \, G(z)^N \\
&= G_n(G(z))
\end{aligned}$$

Par récurrence, il vient : $G_n = \underbrace{G \circ \dots \circ G}_{n \text{ fois}}$, la suite d'évènements $\{Z_n = 0\}$ étant croissante, on a $\mathbb{P}(\text{ext}) = \lim\limits_{n \to +\infty} \underbrace{\mathbb{P}(Z_n = 0)}_{= G_n(0)} =: \ell$. La fonction G étant continue, la relation $G_{n+1}(0) = G(G_n(0))$ donne $G(\ell) = \ell$, donc ℓ est un point fixe de G. On rappelle que $G : z \longmapsto \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\xi_1^{(0)} = k) z^k$, donc G est $\mathcal{C}^\infty$, et on a $G' : z \longmapsto \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k \, \mathbb{P}(\xi_1^{(0)} = k) z^{k-1}$, ainsi que $G'' : z \longmapsto \sum\limits_{k=2}^{+\infty} k(k-1) \mathbb{P}(\xi_1^{(0)} = k) z^{k-2}$, donc G'' est positive sur $[0,1]$, ce qui donne G convexe.

On a de plus $G(1) = 1$ et $G'(1) = m$.



$m < 1$ (cas sous-critique) — $m = 1$ (cas critique) — $m > 1$ (cas sur-critique)

On pose
$$H : \begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{G(z) - 1}{z - 1} & \text{si } z < 1 \\ m & \text{si } z = 1 \end{cases} \end{array}$$
, qui est une fonction continue (car $G'(1) = m$) et croissante (car G est convexe).

- <u>Cas $m < 1$:</u> Pour tout $z \in [0,1[$, on a $H(z) \leq m$, donc $G(z) - 1 \geq (z-1)m$, ce qui donne $G(z) - z \geq (z-1)m + 1 - z = (1-z)(1-m) > 0$, donc 1 est le seul point fixe de G, ce qui donne $\mathbb{P}(ext) = 1$.

• <u>Cas $m = 1$:</u> Si H croît strictement vers 1, on a, pour tout $z \in [0, 1[$, $H(z) < m$, donc $G(z) - 1 > z - 1$, d'où $G(z) - z > 0$. Comme avant, on a alors $\mathbb{P}(ext) = 1$. Sinon, H est constante égale à 1 sur un intervalle $[1-\delta, 1]$, avec $\delta > 0$. Pour tout $z \in [1-\delta, 1]$, on a alors $G(z) = z$. Par unicité du développement en série entière, on a $G(z) = z$ pour tout $z \in [0, 1]$.
Dans ce cas, on a $\xi_1^{(0)}$ presque sûrement égale à 1, d'où $\mathbb{P}(ext) = 0$.

• <u>Cas $m > 1$:</u> On commence par fixer $\delta > 0$ tel que $H(1-\delta) > 1$.
On a alors $G(1-\delta) - 1 < (1-\delta) - 1$, donc $G(1-\delta) - (1-\delta) < 0$. La fonction $z \longmapsto G(z) - z$ est alors continue, prend une valeur positive en 0, une valeur strictement négative en $1 - \delta < 1$. Par théorème des valeurs intermédiaires, G admet un point fixe sur $[0, 1[$. On pose $s = \max \{ z \in [0,1[\,/\, G(z) = z \}$.
Pour tout $z > s$, on a $G(z) < z$, ce qui impose $G'(s) \leq 1$.
En effet, si $G'(s) > 1$, alors $\dfrac{G(s+\varepsilon) - s}{\varepsilon} > 1$ pour ε assez petit, donc $G(s+\varepsilon) > s + \varepsilon$, ce qui est absurde. Les deux premiers cas permettent alors d'affirmer que s est l'unique point fixe de G.
Pour tout $z > s$, on a $G(z) < z$, donc la suite $(G^n(z))$ décroît vers s.

croît

$z < s$, $G(z) > z$

En définitive, $\mathbb{P}(ext) = s \in [0, 1[$.