13 Théorèmes de Ceva et Menelaüs par les groupes

ref : Maison

Théorème 13.1 *Soit ABC un triangle non aplati du plan affine $\mathcal{E}$. On prend trois points A', B' et C' respectivement sur les droites (BC), (CA) et (AB) et on pose $\mathcal{D}_A = (AA')$, $\mathcal{D}_B = (BB')$ et $\mathcal{D}_C = (CC')$.*

1. *(Menelaüs) : Les points A', B' et C' sont alignés si et seulement si*

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$$

2. *(Ceva) : Les droites $\mathcal{D}_A$, $\mathcal{D}_B$ et $\mathcal{D}_C$ sont concourantes ou parallèles si et seulement si*

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$$

Menelaüs :

Soit $h_{A\to B}$ l'homothétie-translation de centre C' envoyant A sur B, $h_{B\to C}$ et $h_{C\to A}$ définies de même. On a $h_{C\to A} \circ h_{B\to C} \circ h_{A\to B} = h'$ est une homothétie (c'est le groupe des homothéties-translations) de centre A car ce point est fixé par construction. L'application $h_{B\to C} \circ h_{A\to B}$ stabilise la droite $(A'C')$ puisque celle-ci passe par les deux centres des homothéties. Donc h' préserve la droite $(A'C')$ si et seulement si $h_{C\to A}$ préserve a droite $(A'C')$, c'est-à-dire si et seulement si A', B' et C' sont alignés.

Mais h' étant une homothétie de centre A, elle préserve la droite $(A'C')$ si et seulement si c'est l'identité, c'est-à-dire si et seulement si son rapport vaut 1.On trouve donc la condition :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$$

en utilisant la multiplicativité des rapports ($f \to \vec{f}$ est un morphisme de GA dans GL).

De Menelaüs à Ceva :

On trace les droites D_A, D_B et D_C, qui intersectent en A', B' et C' les côtés du triangle. On construit le point D' comme intersection de $(A'B')$ et de (AB).

On écrit le théorème de Menelaüs dans le triangle ABC avec les points A', B' et D' :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{D'A}}{\overline{D'B}} = 1$$

Pour passer au résultat de Ceva, à savoir

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$$

il faut examiner le terme :

$$\frac{\overline{D'A}}{\overline{D'B}} \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}}$$

En fait, c'est le birapport $[A, B, C', D']$.

Il faut et il suffit de montrer que ce birapport vaut -1 si et seulement si les droites D_A, D_B et D_C sont concourantes.

Ce sont des notions projectives, on transforme la figure en envoyant la droite CD' à l'infini, ainsi le quadrilatère $ABA'B'$ devient un parallélogramme, les droites D_B et D_A se coupent au milieu des diagonales et la droite D_C étant parallèle aux côtés (AB') et $(A'B)$, elle concourt avec les diagonales si et seulement si $[A, B, C', D'] = \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$.

Leçons concernées : groupes en géométrie.